Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations, vocabulaire et rappels

Ensembles

— On note l'ensemble des nombres entiers positifs par $\mathbf{N}$, l'ensemble des entiers relatifs par $\mathbf{Z}$, l'ensemble des rationnels par $\mathbf{Q}$, l'ensemble des nombres réels par $\mathbf{R}$ et l'ensemble des nombres complexes par $\mathbf{C}$ avec les inclusions $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Pour tout réel $r>0$, on note

$$r\mathbf{Z}=\{rk\,;\,k\in\mathbf{Z}\}.$$

— Un ensemble est *dénombrable* s'il est fini (éventuellement vide) ou en bijection avec $\mathbf{N}$. Pour tout ensemble E fini, $\#E$ désigne le nombre de ses éléments, avec la convention : $\#\varnothing=0$.

— Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on note $\lfloor x\rfloor$ la *partie entière* de x, c'est-à-dire $\lfloor x\rfloor=\max\{k\in\mathbf{Z} : k\leq x\}$.

— Pour tout nombre complexe $z\in\mathbf{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué, $|z|$ son module, $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire, si bien que $z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$ où i est tel que $i^2=-1$.

— **Sous-groupes additifs de R**. On rappelle que, si G est un sous-groupe additif non-trivial de $\mathbf{R}$, alors on a l'alternative suivante : ou bien il est dense dans $\mathbf{R}$, ou bien il existe un réel $r>0$ tel que $G=r\mathbf{Z}$.

Fonctions

— Pour toute fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et pour tout $a\in\mathbf{R}$, on note $f(\cdot+a)$ la fonction f *translatée de* a, c'est-à-dire la fonction $t\in\mathbf{R}\mapsto f(t+a)\in\mathbf{C}$. Si $a\neq 0$, on note $f(a\,\cdot)$ la fonction $t\in\mathbf{R}\mapsto f(at)\in\mathbf{C}$.

— On note $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui sont continues et bornées. Pour toute fonction $f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$, on note $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|$, qui est donc une quantité finie.

— Pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, on note $\mathsf{e}_\lambda\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ la fonction donnée pour tout $t\in\mathbf{R}$ par

$$\mathsf{e}_\lambda(t)=e^{i\lambda t}. \tag{1}$$

— Soit I un intervalle non-vide de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$. On dit qu'elle *converge uniformément sur* I vers une fonction f de I dans $\mathbf{C}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{t\in I}|f_n(t)-f(t)|=0$.

Espaces de Banach, topologie

— Soit H un $\mathbf{C}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On désigne par $B(g,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre $g\in H$ et de rayon $\varepsilon>0$, c'est-à-dire $B(g,\varepsilon)=\{f\in H : \|f-g\|<\varepsilon\}$.

— On dit qu'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé H (pas nécessairement de dimension finie), muni d'une norme $\|\cdot\|$, est un espace de Banach s'il est complet pour cette norme.

— On rappelle que $(C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de BANACH.

— Soit $(H, \|\cdot\|)$, un espace de BANACH. Soit $A \subset H$. On note $\overline{A}$ l'*adhérence de* A (pour cette norme)

— Soit $A \subset H$, non-vide. On dit que A satisfait la *propriété de* BOLZANO-WEIERSTRASS si pour toute suite $\big(f_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A, il existe $g \in H$ et une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_{\phi(n)}-g\|=0$.

— Soit $A \subset H$, non-vide. On dit que A satisfait la *propriété de* BOREL-LEBESGUE si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $f_1, \ldots, f_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{1\le k\le n} B(f_k, \varepsilon)$.

— On rappelle que dans un espace de BANACH, les propriétés i-iii) suivantes sont équivalentes

i) A satisfait la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS,

ii) A satisfait la propriété de BOREL-LEBESGUE,

iii) l'ensemble $\overline{A}$ est compact.

Formes hermitiennes.

Soient H un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et une application $\langle \cdot\,,\cdot\rangle : H\times H \to \mathbf{C}$.

— Cette application est une *forme sesquilinéaire* si elle est anti-linéaire à gauche et linéaire à droite, c'est-à-dire que pour tous $f, g, h \in H$ et pour tout $c \in \mathbf{C}$, $\langle h, f + cg\rangle = \langle h, f\rangle + c\langle h, g\rangle$ et $\langle f+cg, h\rangle = \langle f, h\rangle + \overline{c}\langle g, h\rangle$.

— Une forme sesquilinéaire $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ est dite *hermitienne* si pour tout $f, g \in H$, $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$. Cela implique que $\langle f, f\rangle \in \mathbf{R}$.

— Une forme hermitienne $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ est dite *positive* si pour tout $f \in H$, $\langle f, f\rangle \ge 0$.

— Une forme hermitienne positive $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ est dite *définie* si l'égalité $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f = 0$. Une forme hermitienne définie positive est aussi appelée *produit scalaire hermitien.* On rappelle que dans ce cas $f \in H \mapsto \sqrt{\langle f, f\rangle}$ est une norme.

— Soit J un ensemble non-vide. Soit $\{f_j \in H,\ j \in J\}$ une famille de vecteurs indexés par J. On munit H d'une forme hermitienne positive $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ (qui n'est pas nécessairement définie). On dit que la famille $(f_j)_{j\in J}$ est *orthonormée* si pour tout $j \in J$, on a d'une part $\langle f_j, f_j\rangle = 1$ et d'autre part $\langle f_j, f_{j'}\rangle = 0$ pour tout $j' \in J$ distinct de j.

Fonctions périodiques, séries de FOURIER

— Pour tout $r > 0$, on note $\mathscr{F}_r$ l'ensemble des fonctions continues, bornées et r-périodiques :

$$\mathscr{F}_r = \{f \in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}) : f(\cdot + r) = f\}.$$

— On note $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathsf{e}_{2k\pi}; k \in \mathbf{Z})$ l'espace vectoriel des $\mathbf{C}$-combinaisons linéaires finies des fonctions $\mathsf{e}_{2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$. On rappelle le *théorème de* FEJÉR qui affirme que toute fonction de $\mathscr{F}_1$ est limite uniforme sur $\mathbf{R}$ d'une suite à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathsf{e}_{2k\pi}; k \in \mathbf{Z})$.

— Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_1$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on note $c_n(f)$ son *coefficient de* FOURIER *d'ordre* n qui est donné par

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle la *formule de* PARSEVAL :

$$\forall f \in \mathscr{F}_1, \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

la somme sur $\mathbf{Z}$ étant à comprendre comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|c_n(f)|^2 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}(f)|^2$.

I. Questions préliminaires.

(I.0) Soient $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $h_n : x \in \mathbf{R} \mapsto x + 1/n$. Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction h que l'on précisera. Montrer que la suite $(h_n^2)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers h^2, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$.
Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $C_b(\mathbf{R};\mathbf{C})$ qui convergent uniformément sur $\mathbf{R}$, vers f et g respectivement, montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers fg sur $\mathbf{R}$.

(I.1) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

(I.1.a) Pour toute fonction $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et pour tout réel $t \in \mathbf{R}$, montrer que l'expression notée

$$(K_\alpha f)(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} f(t+s)\mathrm{d}s$$

est bien définie.

(I.1.b) On fixe $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et $t \in \mathbf{R}$. Soit une suite réelle $\big(t_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (K_\alpha f)(t_n) = (K_\alpha f)(t)$.

(I.1.c) Montrer que l'application K_α qui à $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ associe la fonction $K_\alpha f$ est un endomorphisme continu de $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

(I.1.d) Calculer $\inf \Big\{ c \in]0, +\infty[: \forall f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}),\ \|K_\alpha f\|_\infty \leq c\|f\|_\infty \Big\}$.

(I.2) Soit $\beta \in \mathbf{C}$ et soit $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Le but de ce groupe de questions est d'étudier les fonctions y de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui sont de classe C^1 et qui sont solutions de l'équation différentielle

$$(E_{\beta,f}) \qquad \forall t \in \mathbf{R},\ y'(t) = \beta y(t) + f(t).$$

(I.2.a) Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbf{C}$ il existe une unique solution y de $(E_{\beta,f})$ telle que $y(0) = z_0$ et donner une expression explicite de cette solution.

(I.2.b) Soit y une solution de $(E_{\beta,f})$. On suppose $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Pour tout réel $t \geq t_0$, exprimer $e^{-\beta t}y(t) - e^{-\beta t_0}y(t_0)$ comme une intégrale. En déduire l'existence de $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\beta t}y(t)$, limite que l'on notera ℓ. Exprimer $y(t_0)$ en fonction de ℓ, $e^{\beta t_0}$ et de la quantité $(K_\beta f)(t_0)$ introduite au **(I.1)**.

(I.2.c) En déduire que pour tout $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, la fonction $t \mapsto -K_\beta f(t)$ est l'unique solution de classe C^1 bornée sur $\mathbf{R}$ de l'équation $(E_{\beta,f})$.

(I.2.d) Soit $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) < 0$. Justifier que $(E_{\beta,f})$ a une unique solution dans $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ que l'on exprimera à l'aide de l'endomorphisme $K_{-\beta}$.

(I.2.e) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Trouver une fonction $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que les solutions de $(E_{i\lambda,f})$ ne soient pas bornées.

(I.3) Dans la suite, J désigne un ensemble non-vide qui est vu comme un ensemble d'indices. Soit $\{a_j \in [0, +\infty[\,, j \in J\}$, une famille de nombres réels positifs indexés par J. On définit la *somme des*

$(a_j)_{j\in J}$ comme la quantité (possiblement infinie) suivante :

$$\sum_{j\in J} a_j = \sup\Big\{\sum_{j\in S} a_j\ ;\ S\subset J \text{ avec } S \text{ non-vide et fini}\Big\}.$$

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que la somme des $(a_j)_{j\in J}$ est une quantité finie, ce qu'on écrira $\sum\limits_{j\in J} a_j < \infty$.

(I.3.a) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on pose $D_p = \{j \in J : a_j \geq 2^{-p}\}$. Montrer que D_p est fini et que

$$\#D_p \leq 2^p \sum_{j\in J} a_j.$$

(I.3.b) Montrer que l'ensemble $D = \{j \in J : a_j \neq 0\}$ est dénombrable.

(I.3.c) On suppose que D est infini. On se donne une énumération de D, c'est-à-dire une bijection $n \in \mathbf{N} \mapsto j(n) \in D$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{j(k)}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{j\in J} a_j.$$

(I.4) Soit $(H, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{C}$-espace de Banach. Soit H_0 un sous-espace vectoriel de H tel que $\overline{H_0} = H$. Soit $\ell : H_0 \to \mathbf{C}$, une application $\mathbf{C}$-linéaire telle que pour tout $f \in H_0$, $|\ell(f)| \leq \|f\|$. Le but de ce groupe de questions est de montrer qu'il existe une unique application $\mathbf{C}$-linéaire $\Lambda : H_0 \to \mathbf{C}$ satisfaisant la propriété suivante

$$(P) \qquad \text{pour tout } f \in H_0,\ \Lambda(f) = \ell(f) \text{ et pour tout } f \in H,\ |\Lambda(f)| \leq \|f\|.$$

(I.4.a) Montrer que si Λ_1 et Λ_2 satisfont (P), alors $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

(I.4.b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H_0 qui est de Cauchy dans $(H, \|\cdot\|)$. Montrer que la suite $(\ell(f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

(I.4.c) Soient $f \in H$ et deux suites $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de H_0 telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|f - g_n\| = 0.$$

Montrer que $\big(\ell(f_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(\ell(g_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite, que l'on notera $\Lambda(f)$, car elle ne dépend donc que de f et non des suites ayant f pour limite.

(I.4.d) Montrer que Λ est une application $\mathbf{C}$-linéaire. Montrer qu'elle satisfait (P).

II. Polynômes trigonométriques généralisés.

On appelle *polynôme trigonométrique généralisé* toute $\mathbf{C}$-combinaison linéaire finie des fonctions $\mathtt{e}_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, données par (1). On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés.

(II.1) Montrer que $\mathscr{P}$ est un $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pour tout $b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ et pour tout $f \in \mathscr{P}$, montrer que $f(\cdot + b) \in \mathscr{P}$ et que $f(b\,\cdot) \in \mathscr{P}$. Montrer également que si $f, g \in \mathscr{P}$, alors $\bar{f}g \in \mathscr{P}$.

(II.2) Soit un entier $n \geq 1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ distincts. Montrer que la famille $\{\mathtt{e}_{\lambda_1}, \ldots, \mathtt{e}_{\lambda_n}\}$ est libre. En déduire que les fonctions $\{\mathtt{e}_\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$ forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{P}$.

Notation. Pour tout $g \in \mathscr{P}$, on note $\mathtt{a}(g, \lambda) \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, les coordonnées de g dans la base $(\mathtt{e}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$. Le nombre $\mathtt{a}(g, \lambda)$ est appelé *coefficient de* Fourier *généralisé de g d'ordre* λ. On introduit également la notation $\mathrm{Sp}(g) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \mathtt{a}(g, \lambda) \neq 0\}$ qui est appelé *spectre de g*. On a donc $g = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(g)} \mathtt{a}(g, \lambda)\mathtt{e}_\lambda$, ou encore $g = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathtt{a}(g, \lambda)\mathtt{e}_\lambda$, cette écriture étant unique.

(II.3) Soit $\lambda_0 \in \mathbf{R}$.

(II.3.a) Montrer que $f \in \mathscr{P} \mapsto \mathtt{a}(f, \lambda_0)$ est une application $\mathbf{C}$-linéaire.

(II.3.b) Soient $f \in \mathscr{P}$, $b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ et un entier $k \geq 1$. Exprimer les coefficients

$$\mathtt{a}(\bar{f}, \lambda_0), \quad \mathtt{a}\big(f(\cdot + b), \lambda_0\big), \quad \mathtt{a}\big(f^{(k)}, \lambda_0\big), \quad \mathtt{a}\big(f(b\,\cdot), \lambda_0\big)$$

en fonction des coefficients $(\mathtt{a}(f, \lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

(II.3.c) Soient $f, g \in \mathscr{P}$. Montrer qu'il y a un sens à poser $\langle f, g\rangle = \mathtt{a}(\bar{f}g, 0)$. Montrer que $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathscr{P}$.

(II.3.d) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit un entier $n \geq 1$. Calculer $\frac{1}{n}(\mathtt{e}_\lambda(0) + \mathtt{e}_\lambda(1) + \ldots + \mathtt{e}_\lambda(n-1))$ selon que λ appartient à $2\pi\mathbf{Z}$ ou pas.

(II.3.e) Soit $f \in \mathscr{P}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $g_n = \frac{1}{n}(f + f(\cdot + 1) + \ldots + f(\cdot + n-1))$. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une limite g que l'on précisera en fonction de $\mathrm{Sp}(f)$ et des $(\mathtt{a}(f, \lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$.

(II.3.f) Montrer que $f \in \mathscr{P}$ est 1-périodique si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset 2\pi\mathbf{Z}$. En déduire que pour tout réel $r > 0$, $f \in \mathscr{P}$ est r-périodique si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset 2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$

(II.4) Soit $r > 0$. Pour tout $f \in \mathscr{P}$, on pose $Lf = f(\cdot + r) - f$.

(II.4.a) Montrer que L est un endomorphisme de $\mathscr{P}$.

(II.4.b) Déterminer le noyau de L.

(II.4.c) Soit $f \in \mathscr{P}$. Montrer que le spectre de Lf ne contient pas d'éléments de $2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$. Déterminer l'image de L.

(II.5) Soit $\varphi > 0$ un réel supposé irrationnel, c'est-à-dire $\varphi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Soient $c_0, c_1 \in \mathbf{C}$, supposés non-nuls et tels que $|c_0| \geq |c_1|$. Le but de ce groupe de questions est de décrire l'adhérence de l'image de $f = c_0 \mathsf{e}_{2\pi} + c_1 \mathsf{e}_{2\pi\varphi}$, c'est-à-dire l'ensemble $A = \overline{\{f(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}}$. La suite du problème est indépendant de ce résultat.

(II.5.a) Montrer que f n'est pas périodique.

(II.5.b) On note $G = \{m + n\varphi\,;\, m, n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $s \in G$, on a : $c_0 e^{2i\pi t} + c_1 e^{2i\pi\varphi t} e^{2i\pi s} \in A$ et que G est un sous-groupe dense.

(II.5.c) On pose $B = \left\{|c_0| e^{2i\pi t} + |c_1| e^{2i\pi s}\,;\, s, t \in [0,1]\right\}$. Montrer que $B \subset A$.

(II.5.d) On note D l'anneau $\left\{z \in \mathbf{C} : |c_0| - |c_1| \leq |z| \leq |c_0| + |c_1|\right\}$ et on pose

$$C = \{|c_0| + |c_1| e^{2i\pi s}; s \in \mathbf{R}\}.$$

Représenter C et D dans le plan complexe. Montrer que si $z_0 \in B$, alors B contient le cercle centré en l'origine et de rayon $|z_0|$. Montrer ensuite que B contient l'anneau D. Montrer enfin que $A = B = D$.

III. Limites uniformes de polynômes trigonométriques généralisés.

(III.1) Pour tout $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et tout réel $t > 0$, on pose

$$M(f,t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s.$$

(III.1.a) Pour tous $\lambda, t \in \mathbf{R}$, on pose $m_\lambda(t) = M(\mathsf{e}_\lambda, |t|)$ si $t \neq 0$ et $m_\lambda(0) = 1$. Montrer que $m_\lambda \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Calculer m_λ selon que λ est nul ou pas. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer que $\|m_\lambda\|_\infty = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$, montrer que $\lim_{t \to +\infty} m_\lambda(t) = 0$.

(III.1.b) Soit $f \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} M(\mathsf{e}_{-\lambda} f, t) = \mathsf{a}(f, \lambda)$.

(III.1.c) Pour tout $f \in \mathscr{P}$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer que $|\mathsf{a}(f, \lambda)| \leq \|f\|_\infty$.

Notation. On note $\overline{\mathscr{P}}$ l'adhérence de $\mathscr{P}$ dans $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

(III.2) Montrer que $\overline{\mathscr{P}}$ est un sous-espace vectoriel de $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ tel que si $f, g \in \overline{\mathscr{P}}$, alors $\overline{f} g \in \overline{\mathscr{P}}$.

(III.3) On fixe $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que l'application linéaire $f \in \mathscr{P} \mapsto \mathsf{a}(f, \lambda) \in \mathbf{C}$ s'étend à $\overline{\mathscr{P}}$ de manière unique en une forme linéaire *que l'on note de la même façon* et qui est telle que $|\mathsf{a}(f, \lambda)| \leq \|f\|_\infty$, pour tout $f \in \overline{\mathscr{P}}$.

Notation. Pour tout $f \in \overline{\mathscr{P}}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le nombre complexe $\mathsf{a}(f, \lambda)$ est appelé *coefficient de* FOURIER *généralisé d'ordre λ de f*. On appelle également $\mathrm{Sp}(f) = \left\{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \mathsf{a}(f, \lambda) \neq 0\right\}$ le *spectre de f*.

(III.4) On fixe $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in \overline{\mathscr{P}}$. On se donne une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ composée d'éléments de $\mathscr{P}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

(III.4.a) Soit $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$. Montrer que $(f_n(\cdot + b))_{n \in \mathbf{N}}$, $(f_n(b\, \cdot))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\overline{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent uniformément sur $\mathbf{R}$ et préciser leurs limites respectives.

(III.4.b) Pour tout $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, exprimer, en fonction des coefficients $(\mathsf{a}(f, \lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$, les coefficients $\mathsf{a}(\overline{f}, \lambda_0)$, $\mathsf{a}\big(f(\cdot + b), \lambda_0\big)$ et $\mathsf{a}(f(b\, \cdot), \lambda_0)$.

(III.4.c) Pour tout réel $t > 0$, montrer que

$$|M(\mathsf{e}_{-\lambda} f, t) - \mathsf{a}(f, \lambda)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |M(\mathsf{e}_{-\lambda} f_n, t) - \mathsf{a}(f_n, \lambda)| + |\mathsf{a}(f_n, \lambda) - \mathsf{a}(f, \lambda)| \, .$$

(III.4.d) En déduire que $\lim_{t \to +\infty} M(\mathsf{e}_{-\lambda} f, t) = \mathsf{a}(f, \lambda)$, pour toute fonction $f \in \overline{\mathscr{P}}$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

(III.4.e) Soit $f \in \overline{\mathscr{P}}$. On suppose que f est C^1 et on suppose que sa dérivée f' appartient également à $\overline{\mathscr{P}}$. Exprimer $\mathsf{a}(f', \lambda)$ en fonction de $\mathsf{a}(f, \lambda)$ et de λ.

IV. Égalité de Bessel pour les coefficients de Fourier généralisés

(IV.1) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels supposés distincts. Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|b_n|$ soit une quantité finie.

(IV.1.a) Montrer que la série de fonctions de terme général $b_n\mathtt{e}_{\lambda_n}\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ et si on note $g=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n\mathtt{e}_{\lambda_n}$ montrer que $g\in\overline{\mathscr{P}}$. Pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, montrer que si $\lambda\notin\{\lambda_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ alors $\mathtt{a}(g,\lambda)=0$ mais que $\mathtt{a}(g,\lambda_n)=b_n$, pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Dans le groupe de questions suivant, on choisit

$$\lambda_0=b_0=0 \text{ et pour tout entier } n\geq 1,\ \lambda_n=b_n=1/n^2. \tag{3}$$

(IV.1.b) Déterminer les solutions réelles t de l'équation $g(t)=g(0)$. Montrer que g n'est pas périodique.
Indication : On pourra remarquer que la partie réelle de $g(0)-g(t)$ peut s'exprimer comme une série à termes positifs.

(IV.1.c) Montrer que g est développable en série entière en 0. On précisera le rayon de convergence.

(IV.2) Soit H un $\mathbf{C}$-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne positive $\langle\cdot,\cdot\rangle$, qui n'est pas nécessairement définie. Pour tout $f\in H$, on pose $q(f)=\langle f,f\rangle$. Soit $\{f_j,\ j\in J\}$, une famille d'éléments de H orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour tout $S\subset J$ fini et non-vide et toute fonction $f\in H$, on pose

$$P_Sf=\sum_{j\in S}\langle f_j,f\rangle f_j$$

et on note $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in S)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $\{f_j,\ j\in S\}$. Dans ce qui suit, on considère $f\in H$ fixé.

(IV.2.a) Soit $S\subset J$ fini et non-vide. Pour tout $g\in\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in S)$, montrer que

$$\langle f-P_Sf,g\rangle=0,\qquad q(f-g)\geq q(f-P_Sf),\qquad q(f)=q(f-P_Sf)+q(P_Sf).$$

(IV.2.b) En déduire que $q(f)\geq\sum_{j\in J}|\langle f_j,f\rangle|^2$.

(IV.2.c) On suppose qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(f_j;j\in J)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}q(f-g_n)=0$. Montrer que $q(f)=\sum\limits_{j\in J}|\langle f_j,f\rangle|^2$.

(IV.3) Pour tout $f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et tout réel $t>0$, on rappelle la notation $M(f,t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$.

(IV.3.a) On fixe un réel $t>0$ et pour toutes $f,g\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$, on pose $\langle f,g\rangle_t=M(\bar{f}g,t)$. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_t$ est une forme hermitienne positive sur $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Montrer qu'elle n'est pas définie.

(IV.3.b) Pour toutes $f,g\in\overline{\mathscr{P}}$, montrer que l'on peut bien définir la quantité $\langle f,g\rangle=\mathtt{a}(\bar{f}g,0)$. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne positive (on ne cherchera pas à montrer ici qu'elle est définie).

(IV.3.c) En s'aidant du groupe de questions (**IV.2**), montrer que

$$\forall f \in \overline{\mathscr{P}}, \quad \mathtt{a}(|f|^2, 0) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |\mathtt{a}(f, \lambda)|^2 \quad \text{(égalité de B}\textsc{essel}\text{).} \tag{4}$$

En déduire que $\mathrm{Sp}(f)$ est dénombrable.

(IV.3.d) Soit $\mu \in \mathbf{R}$. On pose $f = g\mathtt{e}_\mu$, où g est la fonction introduite en **(IV.1.a)**, avec (3). Montrer que l'équation différentielle $(E_{i\mu,f})$ n'a pas de solution de classe C^1 dans $\overline{\mathscr{P}}$.
Indication : s'il y en avait une, que pourrait-on dire de son spectre ?

(IV.3.e) À l'aide de la question **(IV.3.c)**, montrer que pour tout $f \in \overline{\mathscr{P}}$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathtt{a}(f, \lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \mathtt{a}(f, \lambda) = 0.$$

(IV.4) Soit $\beta \in \mathbf{C}$ et soit $f \in \overline{\mathscr{P}}$. Dans ce groupe de questions on étudie les éventuelles solutions dans $\mathscr{P}$ et dans $\overline{\mathscr{P}}$ à l'équation différentielle $(E_{\beta,f})$ du **(I.2)**

(IV.4.a) On suppose que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Si $f \in \mathscr{P}$, montrer que $K_\beta f \in \mathscr{P}$, où K_β est l'endomorphisme du **(I.1)**.

(IV.3.b) On suppose que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Si $f \in \overline{\mathscr{P}}$, montrer que $K_\beta f \in \overline{\mathscr{P}}$.

(IV.4.c) Soit $f \in \overline{\mathscr{P}}$. Si $\mathrm{Re}(\beta) \neq 0$, montrer que l'unique solution bornée de $(E_{\beta,f})$ appartient à $\overline{\mathscr{P}}$.

(IV.4.d) Soient $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{P}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de f pour que $(E_{i\lambda_0,f})$ ait une solution y bornée. Montrer que dans ce cas $y \in \mathscr{P}$. (La suite du problème est indépendante de ce résultat.)

(IV.5) Le but de cette question est de faire le lien entre les coefficients de Fourier des fonctions périodiques continues et les coefficients de Fourier généralisés.

(IV.5.a) Montrer que $\mathscr{F}_1 \subset \overline{\mathscr{P}}$. En déduire que pour tout $r > 0$, $\mathscr{F}_r \subset \overline{\mathscr{P}}$.

(IV.5.b) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Montrer que $f \in \mathscr{F}_1 \mapsto c_n(f)$ est une forme linéaire. Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_1$, montrer que $|c_n(f)| \leq \|f\|_\infty$.

(IV.5.c) Soit $r > 0$ et soit $f \in \mathscr{F}_r$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, montrer que $\mathtt{a}(f, 2\pi n/r) = M(f\mathtt{e}_{2\pi n/r}, r)$. Pour tout réel $\lambda \notin 2\pi r^{-1}\mathbf{Z}$, montrer que $\mathtt{a}(f, \lambda) = 0$.

V. Fonctions presque périodiques.

Soit $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble de *ε-périodes de f* par

$$T(f, \varepsilon) = \big\{a \in \mathbf{R} \,:\, \forall t \in \mathbf{R},\ |f(t+a) - f(t)| \leq \varepsilon\big\} = \big\{a \in \mathbf{R} \,:\, \|f(\cdot + a) - f\|_\infty \leq \varepsilon\big\}.$$

(V.1) Montrer que f est périodique si et seulement si $\bigcap_{\varepsilon > 0} T(f, \varepsilon)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

(V.2) Un ensemble $E \subset \mathbf{R}$ est dit *relativement dense* s'il existe un réel $L > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E \cap [x, L + x]$ est non-vide.

(V.2.a) Soit $A \subset B \subset \mathbf{R}$, avec A relativement dense. Montrer que B est relativement dense.

(V.2.b) Montrer que $E \subset \mathbf{R}$ est relativement dense si et seulement s'il existe un réel $L > 0$ tel que pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$ de longueur supérieure ou égale à L, l'ensemble $E \cap I$ est non-vide.

(V.2.c) Préciser, en justifiant la réponse, si les ensembles suivants sont relativement denses : (i) : $b\mathbf{Z}$ avec $b > 0$, (ii) : $\{n^2, -n^2\,;\, n \in \mathbf{N}\}$, (iii) : $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\,;\, n \in \mathbf{N}\}$, (iv) : un compact de $\mathbf{R}$.

Une fonction $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est dite *presque périodique* si pour tout réel $\varepsilon > 0$, $T(f, \varepsilon)$ est relativement dense, autrement dit :

$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\,,\ \exists L_{\varepsilon,f} \in]0, +\infty[\ :\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad [x, x + L_{\varepsilon,f}] \cap T(f, \varepsilon) \neq \varnothing\ .$$

Notation. On note $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions presque périodiques.

(V.3) Montrer que pour tout réel $r > 0$, $\mathscr{F}_r \subset \mathscr{B}$.

(V.4) Donner un exemple de fonction de $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ qui est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ mais qui n'est pas presque périodique.

(V.5) Soient $f \in \mathscr{B}$ et $a, b \in \mathbf{R}$, avec b non-nul. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $g(t) = f(bt + a)$. Montrer que $g \in \mathscr{B}$.

Une fonction $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est dite *normale* si de toute suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\big(f(\cdot + a_{\varphi(n)})\big)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f(\cdot + a_{\varphi(n)}) - g\|_\infty = 0$. Autrement dit, $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est normale si l'ensemble de ses translatées satsisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass dans $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Notation. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des fonctions normales.

(V.6) Montrer que $\mathscr{N}$ est un sous-espace vectoriel de $C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Montrer que si $f, g \in \mathscr{N}$, alors $\overline{f}g \in \mathscr{N}$.

(V.7) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\mathtt{e}_\lambda \in \mathscr{N}$.

(V.8) Soit $f \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C})$; on note

$$A = \{f(\cdot + a),\ a \in \mathbf{R}\} \tag{5}$$

l'ensemble de ses translatées. Soit $\varepsilon > 0$ et on suppose qu'il existe $h \in \mathscr{N}$ tel que $\|f - h\|_\infty \le \varepsilon/3$. Montrer qu'alors il existe un entier n et des réels $a_1, ..., a_n$ tels que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(f(\cdot + a_k), \varepsilon).$$

(V.9) On note $\overline{\mathscr{N}}$ l'adhérence de $\mathscr{N}$ dans $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}); \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in \overline{\mathscr{N}}$. Montrer que l'ensemble A défini par (5) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue dans $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}); \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $\mathscr{N}$ est un fermé de $(C_b(\mathbf{R}, \mathbf{C}); \|\cdot\|_\infty)$.

(V.10) Le but de ce groupe de questions est de montrer que $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}$. À cette fin, on fixe $f \in \mathscr{N}$.

> **(V.10.a)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier n et des réels $a_1, ..., a_n$ tels que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on peut trouver $k \in \{1, ..., n\}$ vérifiant $a - a_k \in T(f, \varepsilon)$.
>
> **(V.10.b)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(f, \varepsilon)$ est relativement dense. Conclure.

(V.11) Montrer que $\overline{\mathscr{P}} \subset \mathscr{B}$.

VI. Injectivité des coefficients de Fourier généralisés.

(VI.1) Soient $f, g \in \mathscr{F}_1$. On suppose que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. À l'aide de l'égalité de Parseval (2), montrer que $f = g$.

(VI.2) On fixe $g \in \overline{\mathscr{P}}$, une fonction non-nulle telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Le but de ce groupe de questions est de montrer que $\mathtt{a}(g, 0) > 0$.

(VI.2.a) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ et des réels $\delta, \varepsilon > 0$ tels que $\inf\limits_{s \in [t_0, t_0+\delta]} g(s) \geq 2\varepsilon$.

(VI.2.b) Montrer qu'il existe un réel $L > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe $b \in [t, t+L]$ satisfaisant $\inf\limits_{s \in [b, b+\delta]} g(s) \geq \varepsilon$. Sans perte de généralité, on peut supposer $L > \delta$.

(VI.2.c) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_{2kL}^{2kL+2L} g(t)\,\mathrm{d}t \geq \delta\varepsilon.$$

En déduire que $\mathtt{a}(g, 0) > 0$.

(VI.3) Soient $f_1, f_2 \in \overline{\mathscr{P}}$ telles que $\mathtt{a}(f_1, \lambda) = \mathtt{a}(f_2, \lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $f_1 = f_2$.
Indication : on pourra commencer par traiter le cas où f_2 est identiquement nulle et s'aider de l'égalité de Bessel (4).

(VI.4) Soit $f \in \overline{\mathscr{P}}$ telle que son spectre est fini. Que peut-on dire de f ?

(VI.5) Soit $f \in \overline{\mathscr{P}}$. On suppose que son spectre est infini. On se donne alors $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels *distincts* tels que $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.

(VI.5.a) On suppose, dans cette question seulement, que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\mathtt{a}(f, \lambda_n)|$ est une quantité finie. Montrer que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathtt{a}(f, \lambda_n)\mathtt{e}_{\lambda_n},$$

la série de fonctions étant normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

(VI.5.b) On suppose que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, que f est C^1, que $f' \in \mathscr{P}$ et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^{-2}$ est une quantité finie. Montrer que $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathtt{a}(f, \lambda_n)\mathtt{e}_{\lambda_n}$, la série de fonctions étant normalement convergente sur $\mathbf{R}$.