Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

- Pour s un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(s)$ la partie réelle de s et $\mathrm{Im}(s)$ sa partie imaginaire.
- Si t est un nombre réel strictement positif et s est un nombre complexe, la puissance complexe t^s est définie par $t^s = \exp((\mathrm{Re}(s) + i\mathrm{Im}(s))\ln(t))$.
- Pour x réel, on définit la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$ par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \text{ tel que } n \leq x\}$$

et la partie fractionnaire de x, notée $\{x\}$ par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
- **Séries de Fourier**
Soit f une fonction localement intégrable 1-périodique. Les coefficients de Fourier de f sont

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}\,\mathrm{d}t, \\ &\forall n \in \mathbf{N},\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

La série de Fourier associée à f est la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{i2\pi nx} = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} (a_n(f)\cos(2\pi nx) + b_n(f)\sin(2\pi nx)).$$

- Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide. On désigne par $L^2(I)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur I, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telles que $x \mapsto |f(x)|^2$ est intégrable sur I (au sens de la mesure de Lebesgue).
- Pour f une fonction définie sur $I \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, on désigne par $\mathrm{supp}(f)$ son *support* : $\mathrm{supp}(f) = I \setminus \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la réunion de tous les ouverts sur lesquels f est nulle presque partout. En particulier, pour presque tout $x \notin \mathrm{supp}(f)$, on a $f(x) = 0$.
- Pour une fonction f de $L^2(]0, +\infty[)$, on note $\|f\|_2$ la norme euclidienne de f définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_{]0,+\infty[} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

- Pour tout borélien $B \subset \mathbf{R}$, on désigne par $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de cet ensemble B : $\mathbf{1}_B(x)$ vaut 1 si $x \in B$ et vaut 0 si $x \notin B$.
- Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. On définit **sa transformée de Fourier** par

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbf{R} \longmapsto \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Soit f une fonction mesurable sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles, on définit sa **transformée de Mellin** par

$$s \in \mathbf{C} \longmapsto \mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

aux points s de $\mathbf{C}$ pour lesquels $t \mapsto f(t)t^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

— Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. Si la quantité $\frac{\|T(u)\|}{\|u\|}$ reste bornée quand u décrit $E\setminus\{0\}$, on appelle norme de l'application linéaire T sa borne supérieure et on note

$$|||T||| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E}.$$

Rappels

On rappelle ici quelques définitions utiles et des énoncés qui pourront être exploités ***sans démonstration*** *tout au long du sujet.*

— **Théorème d'holomorphie pour les séries de fonctions**
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbf{C}$. On suppose
• pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est une fonction holomorphe sur Ω ;
• pour tout compact K de Ω, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur K ;
alors, la fonction F définie sur Ω par $F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z)$ est bien définie et holomorphe sur Ω.

— L'ensemble des fonctions à valeurs réelles à support compact dans $]0,+\infty[$ et continues sur leur support est dense dans $L^2(]0,+\infty[)$.

— **Théorème de Plancherel**
La restriction de la transformée de Fourier à l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ intégrables sur $\mathbf{R}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R})$, que l'on note encore $f \mapsto \widehat{f}$.
Pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\widehat{f}(\xi)$ est la limite au sens de la norme quadratique de $L^2(\mathbf{R})$, lorsque T tend vers l'infini, de $\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
De plus, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

— **Lemme de Fatou**
Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions mesurables sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, la limite inférieure de f_n est mesurable sur I pour tout $n \in \mathbf{N}$ et on a

$$\int_I \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

— **Théorème de prolongement des applications linéaires continues de $L^2(]0,+\infty[)$.**
Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $L^2(]0,+\infty[)$. Soit $T : \mathcal{D} \to L^2(]0,+\infty[)$ une application linéaire continue sur $\mathcal{D}$. Alors T se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur $L^2(]0,+\infty[)$ de même norme que la norme de T sur $\mathcal{D}$.

Le sujet débute par quatre questions préliminaires, essentiellement calculatoires, qui serviront dans la suite du problème mais qui penvent être traitées de manière indépendante. L'objectif de la partie II est d'établir quelques propriétés de la transformée de Mellin définie par (2). La partie III est consacrée à une étude de la fonction zêta de Riemann. Dans la partie IV, on établit un lien entre la fonction partie fractionnaire et la fonction zêta de Riemann via la transformée de Mellin. Dans la partie V, on démontre le sens « facile » du théorème de Baéz-Duarte en prouvant que si la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ est dans l'adhérence d'un certain sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ dans $L^2(]0,+\infty[)$, alors la fonction zêta ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} : 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$. Dans la partie VI, on construit un endomorphisme invariant et continu de $L^2(]0,+\infty[)$ qui agit sur la fonction ρ étudiée en partie IV comme l'opérateur d'inversion J. Enfin, dans la partie VII, on construit à l'aide de la fonction μ de Möbius, une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ sur $]0,+\infty[$ mais qui diverge dans $L^2(]0,+\infty[)$.
Les parties sont généralement indépendantes ; en cas de besoin, on pourra admettre les résultats établis par certaines questions pour aborder les parties suivantes.

I Exercices préliminaires

1. Soient s un nombre complexe et t un réel strictement positif. Montrer que $|t^s| = t^{\mathrm{Re}(s)}$.
2. (a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que sa somme est une fonction continue sur $[0,1]$.
   (b) Déterminer le rayon de convergence r de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ et rappeler la valeur de sa somme sur $]-r,r[$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. (a) Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n (voir (1)) de la fonction 1-périodique
$$x \longmapsto \{x\} - \frac{1}{2}.$$
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{-\pi n}$ converge simplement vers $\{x\} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
4. (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.
   (b) En appliquant, pour $0 < \varepsilon < R$, le théorème des résidus à la fonction $F(z) = e^{iz}/z$ sur le contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ formé des segments $[\varepsilon, R]$ et $[-R,-\varepsilon]$ et des demi-cercles de centre 0 et de rayons ε et R situés dans le demi-plan supérieur, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

II Autour de la transformée de Mellin

1. Soit f une fonction mesurable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note $I(f)$ l'ensemble
$$I(f) = \{\sigma \in \mathbf{R} \text{ tel que } \int_{]0,+\infty[} |f(t)| t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t < +\infty\}.$$

Montrer que, s'il est non vide, $I(f)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Dans ce cas, on note $a(f) = \inf I(f)$ et $b(f) = \sup I(f)$ ($a(f)$ et $b(f)$ sont des éléments de $\overline{\mathbf{R}}$).

2. Montrer que si $f \in L^2(]0, +\infty[)$ est presque partout nulle sur $]1, +\infty[$, alors $]1/2, +\infty[\subset I(f)$.

On s'intéresse **dorénavant** à la transformée de Mellin (2) de f.

3. Montrer que $\mathcal{M}f$ est bien définie sur la bande verticale du plan complexe (éventuellement non bornée à droite ou à gauche) $D(f) = \{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) \in I(f)\}$.
4. Déterminer l'intervalle $I(\mathbf{1}_{]0,1]})$ et la transformée de Mellin de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ sur $D(\mathbf{1}_{]0,1]})$.
5. Soit λ un réel strictement positif et soit f une fonction mesurable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note $T_\lambda f$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $T_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Montrer que $I(f) = I(T_\lambda f)$ et que pour tout $s \in D(f)$, on a $\mathcal{M}(T_\lambda f)(s) = \lambda^{-s}\mathcal{M}f(s)$.

III Fonction zeta de Riemann

Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que la série converge, on note

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{et} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

1. (a) Montrer que les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ convergent simplement dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

   (b) Montrer que les fonction ζ et G sont holomorphes dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
2. Montrer que $\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}} G(s)$ pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.
3. Soit ε un réel strictement positif. On définit la suite $\big(B_\varepsilon(n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles de la série définissant $G(\varepsilon)$ par $B_\varepsilon(0) = 0$ et pour $n \geq 1$, $B_\varepsilon(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\varepsilon}$.

   (a) Vérifier que pour $s \in \mathbf{C}$ et N un entier strictement positif, on a

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}}.$$

   On pourra appliquer le principe de sommation d'Abel.

   (b) En déduire que la série définissant G converge dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > \varepsilon\}$ et que la fonction G vérifie pour s dans ce demi-plan,

   $$G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right).$$

   (c) i. Montrer que pour $t \in \mathbf{R}$ et $u > 0$, on a

   $$\left|(1+u)^{it} - 1\right| \leq |t|u.$$

   ii. Montrer que pour $x \in [0, 1]$ et $u > 0$, on a

   $$|(1+u)^x - 1| \leq xu.$$

iii. Montrer que si $s = \sigma + it$ avec $t \in \mathbf{R}$ et $\sigma \in [\varepsilon, 1+\varepsilon]$, on a

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1\right| \leq \frac{1+|t|}{n}.$$

(d) Montrer que G définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

4. En déduire que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$, que l'on notera encore ζ, et déterminer la valeur du résidu de ζ au pôle $s = 1$.
On pourra utiliser la question I.2.

IV Fonction partie fractionnaire

On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction ρ par

$$\rho(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. (a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer l'expression de ρ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Préciser en particulier la valeur de $\rho(1/n)$. Déterminer également ρ sur $]1, +\infty[$.
   (b) Représenter la fonction ρ sur l'intervalle $[1/4, 3]$.
   (c) Déterminer le domaine de continuité de ρ sur $]0, +\infty[$, montrer que ρ est bornée et déterminer l'image par ρ de l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\rho \in L^2(]0, +\infty[)$ et que $\|\rho\|_2 \leq \sqrt{2}$.
3. Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) < 1$, montrer que $\left(x \mapsto \rho(x)x^{s-1}\right)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer

$$I_1(s) = \int_1^{+\infty} \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

4. (a) Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$, montrer que $\left(x \mapsto \rho(x)x^{s-1}\right)$ est intégrable sur $]0, 1]$ puis montrer que la fonction I_2 définie sur $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$ par

$$I_2(s) = \int_0^1 \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

   est holomorphe sur $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$.
   (b) Montrer que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^1 \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

   On pourra calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/n} x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ *de deux manières différentes.*
   (c) En déduire que 1 est l'unique pôle de ζ dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$ et retrouver la valeur du résidu de ζ en $s = 1$.
5. Montrer que $]0, 1[\subset I(\rho)$ et que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, $\mathcal{M}\rho(s) = -\frac{\zeta(s)}{s}$.

V Distance de $\mathbf{1}_{]0,1]}$ à un espace de fonctions

Soit N un entier positif. On note $\mathcal{B}_N$ le sous-espace vectoriel de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho : x \mapsto \rho(nx)$ avec $n \in \{1,...,N\}$. Autrement dit $\mathcal{B}_N$ est l'ensemble des applications $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \rho(nx), \tag{3}$$

avec $N \in \mathbf{N}^*$ et $c_1, \cdots, c_N$ des nombres réels. Pour $f \in \mathcal{B}_N$, on définit sur $\mathbf{C}$ le polynôme de DIRICHLET Q_f associé à f par

$$Q_f(s) = \sum_{n=1}^{N} c_n n^{-s}. \tag{4}$$

On note $\widetilde{\mathcal{B}_N} = \{f \in \mathcal{B}_N \text{ tel que } Q_f(1) = 0\}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{B}_N$, alors f est nulle sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $f \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$.
2. Si $f \in \mathcal{B}_N$, on note $\tilde{f} = f - Q_f(1)\rho$.
   (a) Montrer que $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$.
   (b) Montrer que
   $$\int_1^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = |Q_f(1)|^2.$$
   (c) En déduire que
   $$\int_0^{+\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_0^{+\infty} |f(x) - \mathbf{1}_{]0,1]}(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$
   puis que
   $$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \leq (1+\sqrt{2})\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2.$$
   On pourra utiliser la question IV.2.
3. Montrer que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}_N}$, on a
   $$\int_0^1 \tilde{f}(x) x^{s-1} \, \mathrm{d}x = -Q_{\tilde{f}}(s)\frac{\zeta(s)}{s}.$$
   On pourra utiliser les questions II.5 et IV.5.
4. Supposons qu'il existe $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $1/2 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$ et $\zeta(\beta) = 0$. Soit f une fonction de $\mathcal{B}_N$. Déduire des questions précédentes la minoration suivante de la distance dans $L^2([0,+\infty[)$ entre la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ et $\tilde{f}$:
   $$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \geq \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}{|\beta|}.$$
   On pourra utiliser l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
5. En déduire que si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho$ avec $n \geq 1$, alors la fonction ζ ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

VI Applications linéaires de $L^2(]0,+\infty[)$.

1. Soit θ un réel strictement positif. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $D_\theta f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ par $D_\theta f(x) = \sqrt{\theta} f(\theta x)$ pour $x > 0$.
   (a) Montrer que D_θ est une application linéaire bijective sur $L^2(]0,+\infty[)$ telle que
   $$\|D_\theta f\|_2 = \|f\|_2.$$
   (b) Montrer que l'ensemble $\{D_\theta, \theta > 0\}$ muni de la loi de composition est un groupe commutatif.
   On dira qu'une application de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$ est invariante si elle commute avec les endomorphismes D_θ pour tout $\theta > 0$.
2. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $Jf :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ par $Jf(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.
   (a) Montrer que J est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$ et déterminer sa norme.
   (b) Pour $\theta > 0$, déterminer θ' tel que $JD_\theta = D_{\theta'} J$.
3. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $Hf :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ par $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
   (a) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On suppose de plus que f est continue.
   Montrer que $Hf \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2$.
   On pourra majorer, pour $0 < \xi < X$, l'intégrale $\int_\xi^X Hf(x)^2\,\mathrm{d}x$ en commençant par intégrer par parties.
   (b) Montrer que H est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$.
4. (a) Montrer que si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, alors pour presque tout réel x, la limite au sens de la norme quadratique $\|\cdot\|_2$, lorsque T tend vers l'infini, de $2\int_0^T f(u)\cos(2\pi x u)\,\mathrm{d}u$ existe. On note $\mathcal{G}(x)$ cette limite. Montrer que $\mathcal{G} \in L^2(\mathbf{R})$.
   (b) **On note C l'application qui à $f \in L^2(]0,+\infty[)$ associe $Cf :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie presque partout sur $]0,+\infty[$ par $Cf(x) = \mathcal{G}(x)$.**
   Montrer que C est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$ et donner une majoration de sa norme.
5. **On note I l'identité de $L^2(]0,+\infty[)$ et V l'application $V = (H - I)CJ$.**
   (a) Montrer que V est une application linéaire continue de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$.
   (b) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On suppose de plus f à support compact et continue sur son support. Montrer que pour $x > 0$, on a
   $$Vf(x) = \int_0^{+\infty} f(v) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\Big(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\Big)\,\mathrm{d}v.$$
   (c) Montrer que V est une application invariante.
   (d) Le but de cette question est de montrer que $V\rho = J\rho$.
      i. Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour $x \in]0,+\infty[\setminus \{1/n, n\}$, on a
      $$\rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) = (J\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$
      ii. En utilisant la question précédente, montrer que pour $x \in]0,+\infty[\setminus \{1/n, n\}$, on a
      $$V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) = \frac{1}{\pi x}\left(\sin(2\pi x/n) + \int_{2\pi x/n}^{2\pi x n} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi x j)}{j}\right).$$
      iii. Montrer que la suite de fonctions $\left(V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers $J\rho$ sur $]0,+\infty[\setminus \mathbf{N}^*$.
      On pourra utiliser les résultats des questions I.3 et I.4.
      iv. En déduire $V\rho = J\rho$ presque partout sur $]0,+\infty[$.

VII Convergence d'une suite de $\cup_N \mathcal{B}_N$ vers $\mathbf{1}_{]0,1]}$

Soit $\mu : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier,} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier strictement positif n, on a :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs positifs de n.

2. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout réel y positif, on a

$$\sum_{1 \le n \le y} \mu(n) \lfloor y/n \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } y \ge 1, \\ 0 & \text{si } y \in [0, 1[. \end{cases}$$

   Dans le cas $y \ge 1$, on pourra écrire $\lfloor y/n \rfloor = \sum_{k \le y/n} 1.$

   On admet pour la suite du sujet que la série $\sum_{n \ge 1} \frac{\mu(n)}{n}$ converge, que sa somme est nulle et que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \right)_{n \ge 1}$ ne converge pas vers 0.

3. Pour $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on note $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-\mu(n))\rho(nx)$.
   (a) Montrer que $S_N \in \mathcal{B}_N$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $\left(S_N\right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ sur $]0, +\infty[$.

4. (a) Montrer que l'on a

$$\int_0^{1/N} |V S_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} \mu(n) \right|^2,$$

   où V est l'application linéaire définie à la partie VI.
   (b) En déduire que la suite $\left(S_N\right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ ne converge pas dans $L^2(]0, +\infty[)$.