Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

— On utilise les notations $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.

— Pour un ensemble $A \subset \mathbf{R}^N$, avec $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{1}_A$ la *fonction indicatrice de* A, c'est-à-dire la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

— Pour tout réel strictement positif ρ, on note

$$\mathcal{D}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| \leq \rho\}, \quad \mathcal{B}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| < \rho\}, \quad \mathcal{C}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| = \rho\}.$$

On utilisera la même notation pour désigner les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ correspondants :

$$\mathcal{D}_\rho = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho\right\}, \quad \mathcal{B}_\rho = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2 + y^2} < \rho\right\},$$
$$\mathcal{C}_\rho = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2 + y^2} = \rho\right\}.$$

— **Distribution de Dirac :** Pour $a \in \mathbf{R}^N$, on note δ_a la forme linéaire définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ par $\phi \longmapsto \langle \delta_a | \phi \rangle = \phi(a)$.

Définitions et rappels

On rappelle ici quelques définitions et des énoncés utiles qui pourront être exploités **sans démonstration** tout au long du sujet :

— Toute fonction *holomorphe* sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est de classe C^∞ sur cet ouvert.

— Toute fonction *méromorphe* sur $\mathbf{C}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.

— **Convergence presque sûre :** On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *converge presque sûrement* vers une variable X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'il existe un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

— **Loi forte des grands nombres :** Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables à valeurs dans $\mathbf{C}$, indépendantes, identiquement distribuées, et admettant une espérance $\mu \in \mathbf{C}$, alors $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement vers μ.

Organisation du sujet

La partie **I** établit des résultats élémentaires qui ne seront utilisés qu'en partie **VI**. Il convient d'y consacrer un temps raisonnable, et en particulier de ne pas trop s'attarder sur certaines questions si on ne parvient pas à y répondre suffisamment rapidement. L'objectif de la partie **II** est de démontrer un résultat relativement classique autour des solutions élémentaires du Laplacien dans le plan, qui sera utilisé en partie **VI**. Elle débute par des observations et calculs en dimension 1 qui permettent de se familiariser avec la notion de solution au sens des distributions. Les parties **III** et **IV** portent principalement sur des résultats d'analyse complexe autour du problème de Dirichlet et la notion de noyau de Poisson. Elles permettent d'établir la formule de Poisson-Jensen, qui sera utilisée en partie **VI**. La partie **IV** ne fait appel qu'au dernier résultat de la partie **III**. La partie **V** est indépendante des autres parties et porte sur des résultats concernant les points critiques de polynômes aléatoires. Elle fait appel à des techniques de probabilités ainsi que d'analyse complexe. La partie **VI** permet d'apporter une généralisation, par le biais de méthodes assez différentes, aux résultats obtenus en partie **V**.

I - Des inégalités utiles pour la suite

1) Justifier que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout $(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbf{R}^m$, on a $\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 \leq m \sum_{j=1}^{m} w_j^2$.

2) Inégalité de Markov : Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si Z est presque sûrement positive ou nulle, alors pour tout réel strictement positif a, on a

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$

3) On définit pour tout $x > 0$,

$$\ln_-(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \ln_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \ln x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a) Tracer l'allure des courbes représentatives de $\ln_-$ et $\ln_+$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, on a

$$\ln_+\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln_+(x_k) + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln_-\left(\frac{1}{x_k}\right) + \ln n.$$

Indication : on pourra commencer par examiner le cas où la somme des x_k est inférieure ou égale à 1.

II - Solutions élémentaires du Laplacien en dimensions 1 et 2

1) Solutions élémentaires du Laplacien en dimension 1

a) Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Justifier que

$$\int_{\mathbf{R}} |x| \, \varphi''(x) \mathrm{d}x = 2\varphi(0).$$

On écrira alors $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \dfrac{|x|}{2} = \delta_0$ et on dira que cette égalité est comprise « au sens des distributions ».

b) Justifier de même, pour tout réel a, l'écriture (toujours au sens des distributions) : $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \dfrac{|x-a|}{2} = \delta_a$.

c) On définit l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$, admettant un nombre fini $n \in \mathbf{N}$ (qui dépend de f) de points de non dérivabilité $a_1 < \ldots < a_n$, et affines sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, où l'on a posé $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$ (avec la convention que si $f \in E$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, $n = 0$, l'ensemble des points de non dérivabilité est vide et f est affine sur $\mathbf{R}$).

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on pose $f_a : x \longmapsto |x - a|$ et on note $\mathrm{id} : x \longmapsto x$.

(i) Soit $f \ : \ x \longmapsto (-2x+1)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(x) + (1+3x)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$. Justifier que f est dans E et montrer que f est combinaison linéaire de la famille de fonctions $(f_0, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$.

(ii) Soit f une fonction de E non dérivable en au moins un point de $\mathbf{R}$ et soient $a_1 < \ldots < a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) ses points de non dérivabilité. Montrer l'existence d'un unique $(n+2)$-uplet de réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma) \in (\mathbf{R}^*)^n \times \mathbf{R}^2$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i} + \beta \mathrm{id} + \gamma \mathbf{1}_{\mathbf{R}}.$$

Indication : Pour l'existence, on pourra raisonner par récurrence sur le nombre n de points de non dérivabilité de f.

(iii) Donner alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'expression de α_i en fonction de la différence des pentes de la fonction f à droite et à gauche du point a_i.

(iv) Tracer la représentation graphique en repère orthonormé de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2, \\ 3 + \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [-2, 4], \\ 1 + x & \text{si } x > 4, \end{cases}$$

puis donner la décomposition de cette fonction sur la famille $(f_{-2}, f_4, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$.

(v) Déduire de ce qui précède, pour toute fonction $f \in E$, l'expression (au sens des distributions) de son Laplacien $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f$ comme combinaison linéaire de distributions de Dirac.

2) Fonctions harmoniques et solutions élémentaires du Laplacien dans le plan

On désigne par Δ l'opérateur Laplacien $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ sur $\mathbf{R}^2$. Dans tout ce qui suit, on identifiera $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec le nombre complexe $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Pour une fonction définie sur $\mathbf{C}$, en notant $z = x + iy$, on considère donc des dérivées partielles par rapport aux parties réelle et imaginaire de la variable complexe.

On rappelle les relations :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

de sorte que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

On dit qu'une fonction h définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ est *harmonique* sur $\mathcal{O}$ si h est de classe C^2 et vérifie $\Delta h = 0$ sur $\mathcal{O}$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \varepsilon\right\}.$$

On pourra utiliser ici **sans plus de justification** que, si u et v sont des fonctions de classe C^∞ sur Ω_ε et si u est à support compact dans $\mathbf{R}^2$, alors on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(x,y)\Delta u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Omega_\varepsilon} u(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \varepsilon \int_0^{2\pi} \vec{n}_\theta \cdot \left(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

où $\vec{n}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ désigne le vecteur unitaire normal intérieur à Ω_ε en θ et $\vec{\nabla}u$ désigne le vecteur de composantes $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}u, \dfrac{\partial}{\partial y}u\right)$.

a) Justifier que si une fonction est holomorphe sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$, ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques sur $\mathcal{O}$.

b) Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

(i) En remarquant (et justifiant) que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta.$$

(ii) A-t-on (au sens des distributions, et en identifiant $z = x+iy \in \mathbf{C}$ et $(x,y)\in\mathbf{R}^2$) égalité entre $\Delta\left(\frac{|z|}{2}\right)$ et δ_0 ?

c) Soit toujours φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

(i) Montrer que $(x,y)\longmapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$.

(ii) Montrer que $(x,y)\longmapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est harmonique sur $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(iii) Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

(iv) Montrer qu'on peut trouver une constante $C>0$, indépendante de $\varepsilon\in]0,1]$, telle que

$$\left|I_\varepsilon - \int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leq C\varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

(v) Justifier alors l'écriture (au sens des distributions)

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\left(\ln(|z|)\right) = \delta_0.$$

d) Soit f une fonction holomorphe et non identiquement nulle sur $\mathbf{C}$. Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact $K\subset\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On peut donc introduire un réel strictement positif R tel que $K\subset\mathcal{D}_R$.

(i) Justifier que f possède un nombre fini de zéros dans $\mathcal{D}_R$.

(ii) On note $z_1,\ldots,z_n$ les zéros de f qui se situent dans $\mathcal{D}_R$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ leurs multiplicités respectives ($n\in\mathbf{N}$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbf{N}^*)^n$ avec la convention que si $n=0$, l'ensemble des zéros contenus dans $\mathcal{D}_R$ est vide). Il existe donc une fonction g holomorphe ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}_R$ telle que pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$f(z) = g(z)\prod_{k=1}^n (z-z_k)^{\alpha_k}.$$

Justifier alors l'existence d'une fonction h holomorphe sur $\mathcal{B}_R$ telle que $g = e^h$ sur $\mathcal{B}_R$. En déduire que pour tout $z\in\mathcal{B}_R$, on a

$$\Delta\ln(|g(z)|) = 2\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial}{\partial z}\ln(|g(z)|^2) = 0.$$

(iii) Justifier alors l'écriture suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \ln|f(z)| = \sum_{\xi\in\mathbf{C} \text{ tel que } f(\xi)=0} \delta_\xi \quad \text{(les zéros de } f \text{ étant comptés avec leur ordre de multiplicité).}$$

III - Problème de Dirichlet sur le disque et formule intégrale de Poisson

On considère une fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$ et à valeurs complexes. Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction g continue sur $\mathcal{D}_1$ et à valeurs complexes, harmonique sur $\mathcal{B}_1$ et égale à f sur $\mathcal{C}_1$ (*problème de Dirichlet sur le disque*).

1) **Noyau de Poisson.** Soit $R > 0$ fixé. Pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$P_R(r,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int}.$$

a) En utilisant un théorème de régularité sous le signe somme, justifier que $t \longmapsto P_R(r,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Soit $r \in [0, R[$ et $t \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $P_R(r,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt) = \operatorname{Re}\left(\frac{R+re^{it}}{R-re^{it}}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t)+r^2}$.

(ii) En déduire que $t \longmapsto P_R(r,t)$ est 2π-périodique, uniformément continue, positive et paire sur $\mathbf{R}$.

2) Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$, continue sur $\mathcal{D}_1$ et harmonique sur $\mathcal{B}_1$.

a) Justifier l'existence de $z_0 \in \mathcal{D}_1$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on a $|g(z)| \leq |g(z_0)|$.

b) On suppose dans un premier temps, *et uniquement dans cette question*, que $|g(z_0)| > 0$. On pose alors pour tout $z \in \mathcal{D}_1$,

$$h(z) = \frac{|g(z_0)|}{g(z_0)} g(z).$$

(i) Vérifier que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on a $\operatorname{Re}(h(z)) \leq |g(z)| \leq \operatorname{Re}(h(z_0))$.

(ii) On définit φ sur $\mathcal{D}_1$ par $\varphi(x,y) = \operatorname{Re}(h(x+iy))$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \varphi(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2).$$

Justifier que $\Delta\psi_\varepsilon > 0$ sur $\mathcal{B}_1$. En déduire que ψ_ε ne peut atteindre de maximum local sur $\mathcal{B}_1$ puis que, pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_1$, on a

$$\varphi(x,y) \leq \max\left\{\varphi(x,y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2=1\right\}.$$

(iii) En déduire l'existence de $\tilde{z}_0 \in \mathcal{C}_1$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$ on a $\operatorname{Re}(h(z)) \leq \operatorname{Re}(h(\tilde{z}_0))$.

(iv) Justifier que $|g(\tilde{z}_0)| = \max_{\mathcal{D}_1} |g|$.

c) Conclure de ce qui précède que $\max_{z\in\mathcal{D}_1} |g(z)| = \max_{z\in\mathcal{C}_1} |g(z)|$.

d) En déduire l'unicité de la fonction g solution au problème de Dirichlet sur $\mathcal{D}_1$ (si une telle solution existe).

3) Pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_1$, avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on définit $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r, \theta - t) f(e^{it})\,\mathrm{d}t$.

a) On note, pour tout réel t, $\phi_1(t)$ la partie réelle de $f(e^{it})$ et $\phi_2(t)$ la partie imaginaire de $f(e^{it})$. Montrer que $g(z) = g_1(z) + ig_2(z)$ avec, pour tout $k \in \{1,2\}$, $g_k(z) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\mathrm{d}t\right)$.

b) En déduire que g est harmonique sur $\mathcal{B}_1$.

Pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, on note désormais $\Psi(f)$ la fonction définie sur le disque $\mathcal{D}_1$ par :

$$z \in \mathcal{D}_1 \longmapsto \Psi(f)(z) = \begin{cases} f(z) & \textit{si } z \in \mathcal{C}_1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r, \theta - t) f(e^{it})\,\mathrm{d}t & \textit{si } z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note f_k la fonction définie sur $\mathcal{C}_1$ par : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$.

4)a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $z \in \mathcal{B}_1$, on a $\Psi(f_k)(z) = r^{|k|}e^{ik\theta}$,

b) En déduire que $\Psi(f_k)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque pour la fonction f_k.

5) Justifier à l'aide de ce qui précède que pour tout polynôme trigonométrique $p = \displaystyle\sum_{|k|\leq n} c_k f_k$, la fonction $\Psi\,(p)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque pour la fonction p.

6)a) Justifier que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r,t)\mathrm{d}t = 1$.

b) En déduire que pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, on a $\displaystyle\sup_{z\in\mathcal{D}_1} |\Psi(f)(z)| \leq \sup_{z\in\mathcal{C}_1} |f(z)|$.

7) Conclure, à l'aide du théorème de Fejér, que pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, $\Psi(f)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque unité pour f.

8) Justifier, à l'aide de ce qui précède, que pour tout $R > 0$, si u est une fonction continue sur $\mathcal{D}_R$ et si u est harmonique sur $\mathcal{B}_R$, alors pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - t) u(Re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

IV - Formule de Poisson-Jensen

On reprend les notations de la partie **III**.

Soit f une fonction *méromorphe* sur $\mathbf{C}$ et soit $R > 0$.

On note $a_1, \ldots, a_m$ les zéros (non nécessairement distincts) de f situés dans $\mathcal{D}_R$ et $b_1, \ldots, b_n$ les pôles (non nécessairement distincts) de f situés dans $\mathcal{D}_R$. Il existe alors une fonction g méromorphe sur $\mathbf{C}$ et n'admettant aucun pôle ni zéro dans $\mathcal{D}_R$ telle que

$$f(z) = g(z)\prod_{i=1}^{m}(z - a_i)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{z - b_j}.$$

1)a) Justifier que si $(a, \omega) \in \mathbf{C}^2$ sont tels que $a \in \mathcal{B}_R$ et $\omega \in \mathcal{C}_R$ alors $1 = \dfrac{R\,|\omega - a|}{|R^2 - \bar{a}\omega|}$.

b) Soit $a \in \mathcal{B}_R$. Justifier que $z \longmapsto \ln\left|R^2 - \bar{a}z\right|$ est harmonique sur $\mathcal{B}_R$. En déduire que pour tout $z = re^{i\theta}$ tel que $z \in \mathcal{B}_R$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln\left|Re^{it}-a\right|\mathrm{d}t = \ln\left|R^2-\bar{a}z\right| - \ln R.$$

c) Justifier que cette formule est encore valable si $a \in \mathcal{C}_R$.

Indication : on pourra, à $z \in \mathcal{B}_R$ fixé, pour $a \in \mathcal{C}_R$ donné et $x \in [0,1[$, poser $a_x = xa$ et justifier le passage à la limite $x \to 1$.

2) Justifier que pour tout $z = re^{i\theta}$ de $\mathcal{B}_R$, on a $\ln|g(z)| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|g(Re^{it})|\,\mathrm{d}t$.

3) Utiliser les résultats précédents pour prouver que, si $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$ n'est ni un zéro ni un pôle de f, alors on a

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta-t)\ln|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{m}\ln\left|\frac{R^2-\overline{a_i}z}{R(z-a_i)}\right| + \sum_{j=1}^{n}\ln\left|\frac{R^2-\overline{b_j}z}{R(z-b_j)}\right|.$$

V - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas où les racines sont distribuées non uniformément sur le cercle unité de $\mathbf{R}^2$

1) Critère de Weyl sur le segment $[0,1]$

On dit qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ de réels de $[0,1]$ est *équidistribuée dans* $[0,1]$ si pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, avec $a \leq b$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{[a,b]}(u_j) = b-a.$$

a) Justifier qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$ si et seulement si pour toute fonction $f\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(u_j) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$.

Indication : Pour le sens direct, on pourra commencer par justifier que le résultat est valable pour toute fonction en escalier.

b) En déduire que si $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{2i\pi k u_j} = 0.$$

c) Réciproquement, on suppose qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ vérifie, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{2i\pi k u_j} = 0$.

(i) Justifier que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ et à valeurs complexes, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(u_j) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Indication : On pourra commencer par démontrer ce résultat pour une fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles, et vérifiant $f(0) = f(1)$.

(ii) Soit $[a, b] \subset [0, 1]$. On pose $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions g et h continues sur $[0, 1]$ telles que $g \leq f \leq h$ sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (h - g)(u)\, du \leq \varepsilon$. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(u_j) = b - a.$$

d) Application : montrer que si $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ alors la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ définie par $u_j = j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ (où pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) est équidistribuée dans $[0, 1]$.

2) Soit $(\Theta_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et identiquement distribuées sur le segment $[0, 1]$ selon une distribution de probabilité ν. On note, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, $Z_j = e^{2i\pi\Theta_j}$ et Z une variable suivant la loi commune aux Z_j, $j \in \mathbf{N}^*$. On note alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{E}(Z^k) = \displaystyle\int_0^1 e^{2ik\pi t} \mathrm{d}\nu(t)$ l'espérance de Z^k.

a) Justifier que si ν est uniforme sur $[0, 1]$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{E}(Z^k) = 0$.

b) Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{E}(Z^k) = 0$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k\Theta_j}$ tend presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(ii) En déduire l'existence d'un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite $(\Theta_j(\omega))_{j \in \mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0, 1]$.

(iii) En remarquant que pour $(a, b) \in [0, 1]^2$, $a \leq b$ fixés, et pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)) = \nu([a, b])$, en déduire que ν est uniforme sur $[0, 1]$.

3) On reprend les notations du **2)** et on suppose désormais que ν n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

On définit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le polynôme aléatoire

$$z \in \mathbf{C} \longmapsto P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - Z_k)$$

(ce qui signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $P_n(z)(\omega) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (z - Z_k(\omega))$). On note $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_{n-1}^{(n)}$ les racines (aléatoires et non nécessairement distinctes) de P_n'. On définit alors $\zeta(P_n') = \displaystyle\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{Y_j^{(n)}}$ où δ_z désigne la mesure de Dirac en z, c'est-à-dire la mesure assignant à tout $A \subset \mathbf{C}$ la valeur 1 si $z \in A$ et 0 sinon.

On note enfin pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a_k = \mathbb{E}(Z^{k+1})$.

a) Justifier que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|a_k| \leq 1$. En déduire que la fonction

$$f \ : \ z \longmapsto -\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k z^k$$

est bien définie sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}_1$ et que pour tout $r \in]0, 1[$, f admet un nombre fini N_r de zéros dans $\mathcal{D}_r$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $V_n(z) = \dfrac{P_n'(z)}{nP_n(z)}$.

(i) Montrer que pour tout $z \in \mathcal{B}_1$,

$$V_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - Z_j} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1} \right) z^k.$$

(ii) En déduire l'existence d'un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, $V_n(z)(\omega)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur tout compact de $\mathcal{B}_1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Soit $r \in]0,1[$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$ et soit $\omega \in \Omega'$.

(i) Justifier qu'il existe un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $|V_n(z)(\omega) - f(z)| < |f(z)|$. En déduire que pour tout $n \geq N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $\dfrac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} \notin \mathbf{R}_-$ puis que

$$\int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{V_n'(z)(\omega)}{V_n(z)(\omega)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \mathrm{d}z = 0.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $\psi : z \longmapsto \dfrac{V_n(z)(\omega)}{f(z)}$ *et une primitive de* $\dfrac{\psi'}{\psi}$ *sur un sous-ensemble bien choisi de* $\mathbf{C}$.

(ii) Montrer que si h est une fonction holomorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$ et possède un zéro d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$ en a alors il existe une fonction φ holomorphe au voisinage de a telle que $\dfrac{h'(z)}{h(z)} = \dfrac{m}{z-a} + \varphi(z)$.

(iii) En déduire que $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\mathcal{C}_r} \dfrac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$ est égale au nombre N_r de zéros (comptés avec leur multiplicité) de f situés dans $\mathcal{B}_r$ puis que pour tout $n \geq N$, $z \longmapsto V_n(z)(\omega)$ admet exactement N_r zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $\mathcal{B}_r$.

d) En déduire que $\zeta(P_n')(K)$ tend presque sûrement vers 0 pour tout compact K inclus dans $\mathcal{B}_1$.

VI - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas général

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On note μ la mesure de probabilité associée aux Z_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$. On définit pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - Z_k)$$

et en tout z tel que $P_n(z) \neq 0$, on pose

$$L_n(z) = \frac{P_n'(z)}{P_n(z)}.$$

Le but de cette partie est de démontrer que pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } P_n'(z)=0} \varphi(z) \text{ converge en probabilité vers } \int_{\mathbf{C}} \varphi(z)\, \mathrm{d}\mu(z) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

On rappelle qu'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est dite *converger en probabilité* vers une variable aléatoire Y (elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$) si pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

A. Un théorème de convergence dominée (et une première convergence en probabilité)

Soit $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré où ν est une mesure (positive) finie et soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\Omega \times X$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ (muni de sa tribu borélienne usuelle). On suppose que

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$-mesurable ;
- il existe $\delta > 0$ pour lequel $\displaystyle\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\,\mathrm{d}\nu(x)$ est bornée en probabilité, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\mathbb{P}\left(\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\,\mathrm{d}\nu(x) \geq C_\varepsilon\right) \leq \varepsilon\,;$$

- pour presque tout $x \in X$, $(f_n(., x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.

1) On suppose dans un premier temps que ν est une mesure de probabilité. Dans toute la suite, on fixe ε un réel strictement positif.

a) Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit $C_p \in \mathbf{R}_+$ et $N_p \in \mathbf{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N_p$, on a

$$\mathbb{P}\left(\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\,\mathrm{d}\nu(x) \geq C_p\right) \leq \frac{1}{p}.$$

(i) Justifier que pour tout $M > 0$, pour tout entier $n \geq N_p$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq M}\,\mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \frac{C_p}{M^\delta}\right) \leq \frac{1}{p}.$$

(ii) En déduire l'existence de $M_p > 0$ tel que pour tout entier $n \geq N_p$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq M_p}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{p}.$$

b) (i) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_X \mathbb{P}\left(|f_n(., x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{d}\nu(x) = 0.$

(ii) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x)\right) = 0.$

(iii) Soit $M > 0$. Conclure à l'aide de l'inégalité de Markov que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}}\mathrm{d}\nu(x) \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right) = 0.$$

(iv) En déduire que pour tout $M > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|<M}\mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

c) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\left(\int_X f_n(., x)\mathrm{d}\nu(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.

2) Montrer que ce résultat reste valable dans le cas où ν est une mesure positive finie quelconque.

B. Application (et seconde convergence en probabilité)

Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$.

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\omega \in \Omega$ fixé. On note $x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n}$ les zéros de $z \longmapsto P_n(z)(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ et $y_{1,n}, \dots, y_{\ell_n,n}$ les zéros de $z \longmapsto P_n'(z)(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ (on a donc $k_n \in \{0, \dots, n\}$ et $\ell_n \in \{0, \dots, n-1\}$).

a) Justifier que pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_R \setminus \{x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n}, y_{1,n}, \dots, y_{\ell_n,n}\}$,

$$\ln|L_n(z)| = I_n(z,R) + \sum_{i=1}^{\ell_n} \ln\left|\frac{R(z - y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n}z}\right| - \sum_{j=1}^{k_n} \ln\left|\frac{R(z - x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n}z}\right|$$

où on a noté

$$I_n(z,R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\rho, \theta - t) \ln\left|L_n(Re^{it})\right| \mathrm{d}t.$$

b) En déduire, en utilisant l'un des résultats de la partie **I**, que

$$\frac{1}{n^2}\ln^2|L_n(z)| \leq \frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2 + \frac{3\ell_n}{n^2}\sum_{i=1}^{\ell_n}\ln^2\left|\frac{R(z - y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n}z}\right| + \frac{3k_n}{n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\ln^2\left|\frac{R(z - x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n}z}\right|.$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \in]0, R[$.

a) Justifier l'existence d'une constante $M(r,R) > 1$ telle que pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_r$ et tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{1}{M(r,R)} < P_R(\rho, \theta - t) < M(r,R).$$

b) En utilisant un des résultats de la partie **I**, justifier que

$$\ln_+\left|L_n(Re^{it})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \ln_-\left|Re^{it} - Z_k\right| + \ln n.$$

c) Justifier l'existence d'une constante $C(R)$ telle que

$$\sup_{z \in \mathbf{C}} \int_0^{2\pi} \ln_-\left|Re^{it} - z\right| \mathrm{d}t < C(R).$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $z \in \mathcal{B}_r$ on a

$$I_n(z,R) \leq \frac{M(r,R)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln_+\left|L_n(Re^{it})\right| \mathrm{d}t \leq \frac{n}{2\pi}M(r,R)C(R) + M(r,R)\ln n,$$

puis justifier l'existence d'une constante $B_1(r,R)$ telle que $\displaystyle\sup_{z \in \mathcal{B}_r} \frac{1}{n} I_n(z,R) \leq B_1(r,R)$.

3) Soit $A = \left\{ z \in \mathbf{C} \text{ tel que } \displaystyle\int_{\mathbf{C}} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|y - z|} = +\infty \right\}$.

a) Montrer que

$$\int_{\mathbf{C}} \left(\int_{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y - z|} \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\lambda(z) = 2\pi$$

où on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$.

b) En déduire que $\lambda(A) = 0$.

On admet dans toute la suite du sujet que pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash A$, $\left(\frac{1}{n}\ln|L_n(z)|\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

4) On suppose $0 \notin A$.

a) Justifier que $\mathbb{E}\left(\ln_-\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)$ est finie et que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left|\frac{x_{j,n}}{R}\right|$ tend presque sûrement vers $-\mathbb{E}\left(\ln_-\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En écrivant la formule de Poisson-Jensen en $z = 0$, en déduire l'existence d'une constante positive $D(R)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}I_n(0,R) \leq -D(R)\right) = 0.$$

c) Montrer que ce dernier résultat reste valable dans le cas général.

5)a) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{B}_r$,

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geq \frac{1}{M(r,R)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t - M(r,R)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_-\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t,$$

puis que

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geq \frac{2\pi M(r,R)}{n}I_n(0,R) - \left(M(r,R) - \frac{1}{M(r,R)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire l'existence d'une constante positive $B_2(r,R)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\inf_{z\in\mathcal{B}_r}\frac{1}{n}I_n(z,R) \leq -B_2(r,R)\right) = 0.$$

6) Déduire de ce qui précède que $\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} I_n(z,R)^2\,\mathrm{d}\lambda(z)$ est bornée en probabilité.

7) Soit toujours $0 < r < R$.

a) Justifier l'existence d'une constante $C_1(r,R)$ telle que

$$\sup_{y\in\mathcal{B}_r}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2\left|\frac{R(z-y)}{R^2-\bar{y}z}\right|\,\mathrm{d}\lambda(z) < C_1(r,R).$$

b) Justifier l'existence d'une constante $C_2(r,R)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_r}\left(\frac{1}{n^2}\ln^2|L_n(z)| - \frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2\right)\,\mathrm{d}\lambda(z) \leq C_2(r,R).$$

c) En déduire que

$$\frac{1}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} \ln^2 |L_n(z)|\ \mathrm{d}\lambda(z)$$

est bornée en probabilité.

8) Conclure que si Ψ est une fonction continue, à support compact sur $\mathbf{C}$, et à valeurs réelles, alors la suite

$$\left(\frac{1}{n}\int_{\mathbf{C}} (\ln |L_n(z)|)\ \Psi(z)\mathrm{d}\lambda(z)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$$

converge en probabilité vers 0.

C. Démonstration du résultat

1) En utilisant un des résultats de la partie **II**, justifier que pour toute fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{\mathbf{C}} (\ln |L_n(z)|)\ \Delta\varphi(z)\,\mathrm{d}\lambda(z) = \frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C}\text{ tel que }P_n'(z)=0} \varphi(z) - \frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C}\text{ tel que }P_n(z)=0} \varphi(z).$$

2) Justifier que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C}\text{ tel que }P_n(z)=0} \varphi(z)$ tend presque sûrement vers $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \varphi\ \mathrm{d}\mu$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Conclure.