Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, Ω le segment $[0,1] \subset \mathbf{R}$ et $\Omega' = \Omega \setminus \mathbf{Q}$, l'ensemble des réels irrationnels de l'intervalle $[0,1]$.

Étant donné un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

On définit l'application $T : \Omega \to \Omega$ par

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $T^n = \underbrace{T \circ T \ldots \circ T}_{n \text{ fois}}$, avec par convention $T^0 = \mathrm{Id}_\Omega$ et $T^1 = T$.

Étant donné une suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n \geq 1}$, on pose

$$[0; a_1] = \frac{1}{a_1}$$

et

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}} \text{ pour } k \geq 2,$$

et on note $\psi_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ la fonction homographique de Ω vers $\mathbf{R}$ définie par

$$\psi_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(t) = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + t] \text{ pour } t \in \Omega.$$

Étant donné quatre réels a, b, c, d, si f désigne la fonction homographique définie par

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

nous écrirons également en utilisant une notation matricielle,

$$f(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t).$$

On rappelle que pour deux fonctions homographiques données,

$$f(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t) \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}(t)$$

on a

$$(f \circ g)(t) = M(t),$$

avec M le produit matriciel dans l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Nous noterons λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de Ω et nous écrirons simplement *fonction mesurable* pour fonction numérique définie sur Ω et $\mathcal{B}$-mesurable.

On note $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ pour désigner l'ensemble (des classes) de fonctions mesurables dont la valeur absolue est intégrable sur Ω pour la mesure λ. S'il n'y a pas d'ambiguité sur la mesure on notera tout simplement $L^1(\Omega)$.

Enfin, on rappelle la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue : pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lambda(B) = \inf_{O \text{ ouvert de } \Omega,\ B \subset O} \lambda(O)$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de Ω et un ouvert O de Ω vérifiant

$$F \subset B \subset O \text{ et } \lambda(O \cap F^c) < \varepsilon.$$

Objectif du sujet.

Le sujet a pour but de définir le développement en fraction continuée d'un réel irrationnel de l'intervalle $[0, 1]$ (partie **I**), d'établir certains résultats de régularité « en moyenne » de ce développement et d'obtenir des estimations quantitatives de sa vitesse de convergence, dus à Khintchine et Lévy (partie **IV**). Pour y parvenir, les outils essentiels sont le théorème ergodique de Birkhoff, établi à la partie **II**, ainsi que l'étude d'une mesure possédant des propriétés d'invariance et d'ergodicité remarquables (partie **III**).

Dépendance des parties entre elles. Les parties **I**, **II** sont indépendantes entre elles ainsi que la section **III.1**. La section **III.2** utilise les résultats de la partie **I**. Enfin, la partie **IV** utilise les trois parties précédentes.

I Résultats préliminaires

Développement en fraction continuée d'un réel irrationnel.

Soit $x \in \Omega'$.

1. Montrer que

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}$$

où $a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

2. En déduire l'existence d'une unique suite d'entiers strictement positifs $(a_n(x))_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} \\ &= \psi_{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)}(T^n(x)), \end{aligned}$$

avec

$$a_j(x) = a_1(T^{j-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor \text{ pour } j \geq 2.$$

On définit les suites $(p_n(x))_{n\geq 0}$ et $(q_n(x))_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} p_0(x) = 0,\ p_1(x) = 1, \\ q_0(x) = 1,\ q_1(x) = a_1(x), \end{cases}$$

et, pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n(x) = a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \\ q_n(x) = a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x). \end{cases}$$

3. Établir les identités, valables pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2(x) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1}(x) & p_n(x) \\ q_{n-1}(x) & q_n(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [0; a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)].$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$q_n(x)p_{n-1}(x) - p_n(x)q_{n-1}(x) = (-1)^n.$$

Montrer par ailleurs que $q_n(x) \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$.

5. Montrer que pour $n \geq 0$, on a $\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} < x < \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}$.

6. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)},$$

et conclure sur la limite de la suite $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 0}$.

Calcul de trois intégrales.

7. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

8. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $2\pi-$périodique, et telle que

$$f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4} \text{ pour } t \in]-\pi, \pi].$$

   (a) Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

   (b) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}.$$

9. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

10. On rappelle (et on ne demande pas de le redémontrer) qu'il existe un réel γ (constante d'Euler) tel que
$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n) \to \gamma \text{ quand } n \to +\infty.$$
Montrer que l'application T est mesurable et que
$$\int_\Omega T(x)\ \mathrm{d}x = 1-\gamma.$$

II Théorème de Birkhoff

Dans cette partie, μ désigne une mesure de probabilité quelconque définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\Omega=[0,1]$, et $U:\Omega\to\Omega$ une application $\mathcal{B}$-mesurable quelconque. L'expression « presque partout » est relative à la mesure μ.

On suppose de plus, dans toute cette partie, que U et μ vérifient les deux conditions suivantes :

(i) Pour toute fonction $f \in L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)$, on a $f\circ U \in L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et
$$\int_\Omega f\circ U\ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\ \mathrm{d}\mu.$$

On dit alors que μ est *invariante par* U.

(ii) Toute fonction $\mathcal{B}$-mesurable $f:\Omega\to\mathbf{R}$, telle que $f\circ U = f$, est égale presque partout à une constante.

On dit alors que U est *μ-ergodique*.

Soit $f:\Omega\to\mathbf{R}$ une **fonction positive** et μ-intégrable. On pose
$$f_0 = 0 \text{ et } f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\circ U^k \text{ pour } n\geq 1,$$
où U^k désigne la composée k fois de l'application U.
Soit $g:\Omega\to\mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable. Avec la convention $\sum_{i=0}^{n-1} g\circ U^i = 0$ pour $n=0$, on introduit les fonctions définies sur Ω :
$$v = \sup_{n\in\mathbf{N}}\left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} g\circ U^i\right)$$
et pour tout entier $n\geq 1$ et j tel que $0\leq j<n$:
$$v_j^n = \max_{j\leq \ell\leq n}\left(f_\ell - f_j - \sum_{i=j}^{\ell-1} g\circ U^i\right).$$

(On prendra comme convention $\sum_{i=j}^{j-1}\cdots = 0$.)

Un lemme de Riesz.

Soit un entier $n \geq 1$ et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des réels. On pose, pour tout entier j tel que $0 \leq j < n$:

$$v_j = \max\Big(0, u_{j+1}, u_{j+1} + u_{j+2}, \ldots, u_{j+1} + \ldots + u_n\Big)$$

et on pose également $v_n = 0$.

1. Pour tout réel x, on pose $x^+ = \max(x, 0)$. Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leq j < n$, on a

$$v_j = (v_{j+1} + u_{j+1})^+$$

2. En déduire que, pour ces mêmes j, on a

$$v_j \leq v_{j+1} + u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}},$$

où la constante $\mathbf{1}_{\{v_j>0\}}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{\{v_j>0\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_j > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. En conclure que

$$\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}} \geq 0.$$

Inégalité Maximale

4. En utilisant le lemme de Riesz, montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(f_{j+1} - f_j - g \circ U^j\right) \mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}} \geq 0,$$

où la fonction $\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } v_j^n(x) > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

5. En déduire que

$$f_n \geq \sum_{j=0}^{n-1} (g \circ U^j)\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}$$

6. Montrer que

$$v_j^n = v_0^{n-j} \circ U^j,$$

et en déduire que

$$f_n \geq \sum_{j=0}^{n-1} \left(g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}}\right) \circ U^j$$

7. En déduire l'inégalité, dite *l'Inégalité Maximale,*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\{v>0\}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve du théorème de Birkhoff

8. Soit $f^* = \limsup \frac{1}{n} f_n$. Montrer que la fonction f^* est presque partout égale à une constante (éventuellement infinie).

   On pourra utiliser la fonction $\arctan(f^*)$.

Par abus de notation, on notera dans la suite de cette partie, cette constante f^*.

9. Soit g une constante strictement inférieure à f^*. On pose (par abus on note g la fonction constante égale à g).

$$v = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} g \circ U^i \right).$$

   Montrer que la fonction v est strictement positive presque partout, et en déduire que

$$f^* \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

10. Pour tout entier $N \geq 1$, on pose

$$\overline{f}_N = N - (N - f)^+.$$

   (a) Montrer que $0 \leq \overline{f}_N \leq f$ et que

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq N - \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (N - f)^+ \circ U^i$$

   (b) Montrer que

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq \int_\Omega \overline{f}_N \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$

   (c) En déduire que

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout,}$$

   puis que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$

11. En déduire le **théorème de Birkhoff** : pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$

III Propriétés de l'opérateur T

Jusqu'à la fin du problème, la lettre T désigne la fonction définie dans le préambule, c'est-à-dire $T : \Omega \to \Omega$ définie par

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\Omega = [0, 1]$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$, et μ l'application définie sur $\mathcal{B}$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln(2)} \int_A \frac{1}{1 + x} \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

III.1 Invariance de la mesure μ par T

La mesure de Gauss

1. Démontrer que μ est une mesure de probabilité sur Ω (appelée mesure de Gauss).

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$
$$\frac{\lambda(A)}{2\ln 2} \leq \mu(A) \leq \frac{\lambda(A)}{\ln 2}. \tag{1}$$

3. Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ si, et seulement si, $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

4. Soit α un réel fixé tel que $0 \leq \alpha < 1$. Montrer que
$$T^{-1}([0,\alpha]) = \{0\} \cup \bigcup_{k\geq 1} \left[\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right]$$

5. Montrer que pour tout réel $\alpha \in [0,1[$,
$$\mu(T^{-1}([0,\alpha])) = \mu([0,\alpha])$$
et en déduire que pour tous réels α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta < 1$, on a
$$\mu(T^{-1}(]\alpha,\beta[)) = \mu(]\alpha,\beta[).$$

6. Montrer que tout ouvert de Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts dans Ω et deux à deux disjoints.

7. En déduire que pour tout ouvert O de Ω et tout fermé F de Ω, on a
$$\mu(T^{-1}(O)) = \mu(O) \quad \text{et} \quad \mu(T^{-1}(F)) = \mu(F).$$

8. Soit $A \in \mathcal{B}$.
   (a) Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert O de Ω tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \cap F^c) < \varepsilon$.
   (b) En déduire que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

9. Montrer que
$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B},$$
où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A.

10. En déduire que μ est invariante par T, c'est à dire pour tout $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$,
$$\int_\Omega f \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$
On pourra commencer par établir l'égalité pour $f \geq 0$.

III.2 Ergodicité de T

On reprend les notations de la partie **I**

Intervalles fondamentaux.

Soit n un entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers strictement positifs fixés. On pose

$$\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{x \in \Omega' \ / \ a_1(x) = a_1, a_2(x) = a_2, \dots, a_n(x) = a_n\}.$$

L'ensemble $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est appelé **intervalle fondamental** d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega'$

$$\psi_{a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)}(t) = \frac{tp_{n-1}(x) + p_n(x)}{tq_{n-1}(x) + q_n(x)}.$$

2. Montrer que $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est l'intersection de Ω' et d'un intervalle de $\mathbf{R}$ dont on précisera les extrémités en fonction des entiers $p_{n-1}(x)$, $q_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ et $q_n(x)$ (pour $x \in \Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$).
3. En déduire que $\lambda(\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Inégalité de sous-mélange.

Soit $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{B}$ et $h : \Omega \to \Omega$ une application mesurable vérifiant pour tout ouvert O

$$\alpha\lambda(O)\lambda(A) \leq \lambda(h^{-1}(O) \cap A).$$

On suppose de plus que la mesure de Gauss μ est h-invariante.

4. Soit $B \in \mathcal{B}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O, $B \subset O$, tel que

$$\alpha\lambda(O)\lambda(A) \leq \varepsilon + \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

On pourra utiliser l'encadrement de la question ***III.****1.2, la question* ***III.****1.8 et la régularité de la mesure de Lebesgue rappelée en préambule.*

5. En déduire que pour tout $B \in \mathcal{B}$

$$\alpha\lambda(B)\lambda(A) \leq \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

Soit $A \in \mathcal{B}$ *invariant* par T, c'est à dire tel que $T^{-1}(A) = A$. Soit également n un entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers strictement positifs fixés. On pose pour simplifier,

$$\Delta_n = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ et } \psi_n = \psi_{a_1, a_2, \dots, a_n}.$$

6. Soient u, v deux réels tels que $0 \leq u < v \leq 1$. Montrer que

$$\frac{\lambda(\ T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = \frac{\psi_n(v) - \psi_n(u)}{\psi_n(1) - \psi_n(0)} = (v - u)\frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + uq_{n-1})(q_n + vq_{n-1})}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{2}\lambda(]u, v[) \leq \frac{\lambda(T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)}.$$

7. En déduire que pour tout ouvert O de Ω :

$$\frac{1}{2}\lambda(O)\lambda(\Delta_n) \leq \lambda(T^{-n}(O) \cap \Delta_n).$$

8. En conclure que pour tout intervalle fondamental Δ_n,

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(\Delta_n) \leq \lambda(A \cap \Delta_n).$$

9. Montrer pour tout ouvert O de Ω :

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(O) \leq \lambda(A \cap O).$$

10. En déduire que pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(B) \leq \lambda(A \cap B).$$

11. En conclure que

$$\mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1.$$

12. Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable telle que $f \circ T = f$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$A_t = \{x \in \Omega \ / \ f(x) \in]-\infty, t[\}$$

et

$$B_t = \{x \in \Omega \ / \ f(x) \in]t, +\infty[\}.$$

(a) Montrer que pour $t \in \mathbf{R}$, $\mu(A_t)$ et $\mu(B_t)$ valent 0 ou 1.

(b) Montrer qu'il existe t_0 tel que $\mu(A_{t_0}) = 0$.

(c) Justifier l'existence dans $\mathbf{R}$ de $s = \sup\{t \in \mathbf{R} / \ \mu(A_t) = 0\}$, et montrer que $\mu(A_s) = 0$.

(d) Que vaut $\mu(B_s) = 0$?

(e) Conclure que T est μ-ergodique.

IV Applications du théorème de Birkhoff

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie **III**. L'expression « presque tout » est relative à la mesure de Lebesgue λ (ou de façon équivalente à la mesure μ).

1. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(x)\right)_{n\geq 1}$ converge pour presque tout $x \in \Omega$, vers une limite que l'on déterminera.

2. **Théorème de A. Khintchine (1935).**

   Montrer que, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log_2 k}$$

3. **Théorèmes de P. Lévy (1936).**

   (a) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ et tout $n \geq 1$, on a

$$x = \frac{p_n(x) + T^n(x)\ p_{n-1}(x)}{q_n(x) + T^n(x)\ q_{n-1}(x)}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ et tout $n \geq 1$, on a

$$q_n(x)x - p_n(x) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} T^k(x).$$

(c) En déduire que, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(|q_n(x)x - p_n(x)|) = -\frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

(d) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ on a $\frac{1}{2} \leq q_n(x)\,|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)| \leq 1$. En déduire que pour presque tout $x \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12\ln 2}$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|\right) = -\frac{\pi^2}{6\ln 2}.$$