Avertissement

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Ce problème est consacré à l'étude de propriétés spectrales d'une classe d'opérateurs compacts, dont on rappelle plus bas la définition, jouissant de certaines propriétés de positivité. Cette étude est illustrée à travers des exemples en dimension finie (partie 1) et sur des espaces de fonctions (partie 3) ou de suites (partie 6).

Les différentes parties du problème peuvent être traitées de façon indépendante. La partie 1 permet de se familiariser avec le sujet en se restreignant au cadre matriciel. La partie 4 démontre un théorème de point fixe (Théorème 2) qui est exploité dans la partie 5. La partie 6 repose en partie sur des notions évoquées dans les parties 2 et 5 ; elle peut encore être abordée indépendamment, quitte à faire une référence claire et précise aux résultats des parties précédentes.

Le sigle ♦ signale l'introduction dans le texte d'une définition, d'une notation, d'une hypothèse ou d'un rappel.

Notations et définitions

- Les espaces vectoriels considérés dans le texte sont définis sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.
- Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On note $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. Pour $A \in M_n(\mathbf{R})$ on note A^T la matrice transposée.
- Pour deux vecteurs a et b de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), on note $(a|b) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$ (resp. $(a|b) = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} b_j$).
- En désignant par $\mathbf{I}$ ou bien l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ ou bien l'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, on note

$$\ell^2(\mathbf{I}) = \Big\{ \big(u_n\big)_{n\in\mathbf{I}} \text{ tel que } u_n \in \mathbf{C} \text{ et } \sum_{n\in\mathbf{I}} |u_n|^2 < \infty \Big\}.$$

  On rappelle que $\ell^2(\mathbf{I})$ muni de $\big\|\big(u_n\big)_{n\in\mathbf{I}}\big\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{I}} |u_n|^2}$ est un espace de Hilbert.

- Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on note $B(x,r)$ la boule fermée de centre $x \in E$ de rayon $r > 0$: $B(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } \|x-y\| \leq r\}$ et $\mathring{B}(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } \|x-y\| < r\}$ la boule ouverte correspondante.
- Soit C une partie d'un espace vectoriel normé E. On désigne par $\overline{C}$ l'adhérence de cet ensemble et par $\mathring{C}$ son intérieur. Si $C \neq \emptyset$, pour $x \in E$ on note $\mathrm{d}(x,C) = \inf\big\{\|x-c\|, c \in C\big\}$.
- Soit E et F deux espaces de Banach. On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications *linéaires* et *continues* (ou *opérateurs*) de E dans F. Pour $A \in \mathcal{L}(E,F)$ on note $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in$

E tel que $Ax = 0\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \{Ax \in F,\ x \in E\}$. Lorsque $F = \mathbf{C}$, on note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$ l'espace des formes linéaires continues sur E. Lorsque $F = E$, on écrit simplement $\mathcal{L}(E)$ et $\mathbf{1}$ désigne l'opérateur identité ; on rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup\big\{\|Ax\|,\ x \in B(0,1)\big\}.$$

En plusieurs occasions, l'énoncé fait appel à la définition suivante.

Définition 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une application (linéaire ou non) $f : \mathcal{A} \subset E \to F$ est compacte si pour tout ensemble borné $B \subset \mathcal{A}$, $\overline{f(B)}$ est un compact de F. Autrement dit, de toute suite $\big(x_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée dans $\mathcal{A}$ on peut extraire une sous-suite $\big(x_{n_k}\big)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans F.*

1 Dimension finie

Les questions qui suivent ont pour objet de démontrer le

Théorème 1. *Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients $a_{k,j}$ positifs. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à coordonnées positives, le vecteur Ax est à coordonnées strictement positives. Alors*

i) le rayon spectral $\rho := \sup\big\{|\lambda|$ où $\lambda \in \mathbf{C}$ est valeur propre de $A\big\}$ est valeur propre simple de A,

ii) il existe un vecteur propre v de A associé à la valeur propre ρ dont les coordonnées sont strictement positives,

iii) toute autre valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| < \rho$,

iv) de même il existe un vecteur propre ϕ de A^T associé à la valeur propre ρ dont les coordonnées sont strictement positives.

1. (1) Soit $(w_1, ..., w_n) \in \mathbf{C}^n$ tel que $|w_1 + ... + w_n| = |w_1| + ... + |w_n|$. Montrer que pour j, ℓ dans $\{1, ..., n\}$ distincts, on a $\mathrm{Re}(\overline{w_j}\ w_\ell) = |w_j|\ |w_\ell|$. En déduire qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ on a $w_j = e^{i\theta}|w_j|$.

♦ Jusqu'à la fin de cette partie $A \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice qui vérifie les hypothèses du théorème 1. On note aussi A l'opérateur de $\mathbf{C}^n$ associé.

1. (2) Montrer que les coefficients de A sont strictement positifs.

1. (3) Pour $z = \big(z_j\big)_{1\le j\le n} \in \mathbf{C}^n$, on note $|z|$ le vecteur de coordonnées $\big(|z_j|\big)_{1\le j\le n}$. Montrer que $A|z| = |Az|$ si et seulement si il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z_j = e^{i\theta}|z_j|$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.

1. (4) On introduit l'ensemble $\mathcal{C} = \big\{x = \big(x_j\big)_{1\le j\le n} \in \mathbf{R}^n$ tel que $x_j \ge 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}\big\}$. Soit $x \in \mathcal{C}$; en notant e le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1, montrer que

$$0 \le (Ax|e) \le (x|e)\ \Big(\max_{j\in\{1,...,n\}} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Big).$$

1. (5) On pose $\mathcal{E} = \{t \geq 0 \text{ tel qu'il existe } x \in \mathcal{C} \setminus \{0\} \text{ vérifiant } Ax - tx \in \mathcal{C}\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$, fermé et borné.

1. (6) On pose $\rho = \max \mathcal{E} > 0$. Montrer que si $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ vérifie $Ax - \rho x \in \mathcal{C}$ alors on a en fait $Ax = \rho x$. (*On pourra observer que si $y = Ax - \rho x \neq 0$ alors on peut exhiber $\epsilon > 0$ tel que $Ay - \epsilon Ax \in \mathcal{C}$.*) En déduire que ρ est valeur propre de A et qu'il existe, pour cette valeur propre, un vecteur propre v à coordonnées strictement positives.

1. (7) Soit $z \in \mathbf{C}^n$; à l'aide de la question 1.(3), montrer que si $Az = \rho z$ et $(z|v) = 0$ alors $z = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}(A - \rho \mathbf{1}) = \mathrm{Vect}\{v\}$ et que toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho$.

1. (8) Montrer que tout vecteur propre de A à coordonnées positives est proportionnel à v. (*On pourra exploiter le fait que A^T admet un vecteur propre à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre ρ.*)

♦ Le théorème 1 peut être exploité pour étudier le comportement asymptotique de certains systèmes différentiels linéaires. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice vérifiant les hypothèses du théorème 1. Il existe donc un couple $(v, \phi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ tel que les coordonnées de v et ϕ sont strictement positives, et vérifiant $(v|\phi) = 1$, $Av = \rho v$ et $A^T\phi = \rho\phi$, où ρ est le rayon spectral de A. On considère le problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y = Ay, \qquad y(0) = y_{\mathrm{Init}} \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

1. (9) Soit $y_{\mathrm{Init}} \in \mathbf{R}^n$ un vecteur à coordonnées positives. Justifier que (1) admet une unique solution $t \mapsto y(t) \in \mathbf{R}^n$ définie sur $\mathbf{R}$, et que pour tout $t \geq 0$, les coordonnées $\big(y_j(t)\big)_{1 \leq j \leq n}$ de $y(t)$ sont positives.

1. (10) Montrer que $(y(t)|\phi)\, e^{-\rho t} = (y_{\mathrm{Init}}|\phi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. (11) En déduire que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, la fonction $t \mapsto e^{-\rho t} y_j(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

1. (12) On rappelle que la décomposition de Dunford permet d'écrire $A = D + N$, avec D diagonalisable sur $\mathbf{C}$, N nilpotente et $DN = ND$. En notant $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A, en déduire que, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, il existe des fonctions polynomiales $\{t \mapsto P_{\lambda,j}(t),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ telles que

$$y_j(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_{\lambda,j}(t) e^{\lambda t}.$$

1. (13) Établir que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, la fonction polynomiale $t \mapsto P_{\rho,j}(t)$ est constante.

1. (14) En déduire finalement que $e^{-\rho t} y(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ qu'on exprimera en fonction de y_{Init}, ϕ et v.

2 Quelques éléments d'analyse spectrale

Soit E un espace de Banach complexe non réduit à $\{0\}$. On admet que $E' \neq \{0\}$. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on introduit l'ensemble $\mathrm{Res}(T)$ des éléments $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $(\lambda \mathbf{1} - T)$ est une bijection de E dans E et $R_\lambda(T) = (\lambda \mathbf{1} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

On définit $\sigma(T)$ le *spectre* de T par $\sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \mathrm{Res}(T)$. En particulier si λ est une valeur propre de T on a $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbf{1} - T) \neq \{0\}$ et donc $\lambda \in \sigma(T)$ (*mais $\sigma(T)$ peut contenir des éléments qui ne sont pas valeurs propres*).

2. (1) On suppose que $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Montrer que dans ce cas $1 \in \mathrm{Res}(T)$ et que $(\mathbf{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

2. (2) Montrer que si $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\lambda \in \mathrm{Res}(T)$ et que de plus on a

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \|R_\lambda(T)\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

2. (3) Établir que $\mathrm{Res}(T)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ et que pour tout $x \in E$ et $\ell \in E'$, l'application $\Phi : \lambda \mapsto \ell\big(R_\lambda(T)x\big)$ est développable en série entière au voisinage de tout point $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(T)$.

2. (4) En déduire que, pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(T)$ est un ensemble compact non-vide. (*On rappelle qu'une fonction de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}$ *holomorphe et bornée sur* $\mathbf{C}$ *est constante.*)

◆ À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que E est de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur compact.

2. (5) Soit $M \neq E$ un sous-espace fermé. Justifier qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\mathrm{d}(u, M) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que l'on peut construire une suite $\big(x_n\big)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|x_n\| = 1$ et $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ lorsque $n \neq m$.

2. (6) Montrer que $0 \in \sigma(T)$ et que pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de T, $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbf{1} - T)$ est de dimension finie.

2. (7) Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda \mathbf{1} - T$ est injectif.

i) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|(\lambda \mathbf{1} - T)x\| \geq \alpha \|x\|$. En déduire que pour tout fermé $\mathcal{F} \subset E$, l'ensemble $(\lambda \mathbf{1} - T)(\mathcal{F})$ est fermé.

ii) On suppose que $\mathrm{Im}(\lambda \mathbf{1} - T) \neq E$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}\big) \subset \mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^n\big)$, l'inclusion étant stricte.

iii) En déduire qu'alors il existerait une suite de vecteurs $\big(x_n\big)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que : $\|x_n\| = 1$, $x_n \in \mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^n\big)$ et $\mathrm{d}\big(x_n, \mathrm{Im}\big((\lambda \mathbf{1} - T)^{n+1}\big)\big) \geq \frac{1}{2}$.

iv) Conclure que $(\lambda \mathbf{1} - T)$ est surjectif, puis que le spectre de T n'est composé que de 0 et d'éventuelles valeurs propres de T.

3 Exemple et contre-exemple sur un espace de fonctions

Pour traiter cette partie, on pourra utiliser, sans justification supplémentaire, l'énoncé suivant.

Théorème (Théorème d'Arzela-Ascoli). *Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose que*

i) $\mathcal{F}$ est uniformément borné c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in I$ on a $|f(x)| \leq M$.

ii) $\mathcal{F}$ est équi-continu c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$, $y \in I$ vérifient $|x - y| \leq \eta$ alors pour tout $f \in \mathcal{F}$ on $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Alors $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans l'ensemble des fonctions continues $C^0(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

3. (1) Sur l'ensemble $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère l'application linéaire $\mathcal{I}$ définie par $\mathcal{I}[f](x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [0,1]$.

i) Montrer que $\mathcal{I}$ est une application continue, compacte et telle que $\mathcal{I}[f] \geq 0$ lorsque f est à valeurs réelles avec $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

ii) Montrer cependant que $\mathcal{I}$ n'admet pas de valeur propre.

♦ À partir de maintenant on désigne par $C^0_\#$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et $1-$périodiques à valeurs complexes, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. À une fonction $f \in C^0_\#$ on associe la suite des coefficients de Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi nx} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Soit $a > 0$. Pour $f \in C^0_\#$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$T[f](x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{2i\pi nx}}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \widehat{f}(n).$$

3. (2) Montrer que $f \mapsto T[f]$ définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(C^0_\#)$.

3. (3) Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$T[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)\ f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où, J étant une constante positive qu'on déterminera, la fonction k est définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = \frac{1}{2a}\big(e^{-a|x|} + J\mathrm{ch}(ax)\big)$ et est prolongée sur $\mathbf{R}$ par $1-$périodicité.

3. (4) En déduire que T est un opérateur fortement positif au sens où si $f \in C^0_\#$, non identiquement nulle, vérifie $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $T[f](x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. (5) Montrer que $T \in \mathcal{L}(C^0_\#)$ est un opérateur compact.

3. (6) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$; montrer que si $f \in C^0_\# \setminus \{0\}$ vérifie $T[f](x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ alors il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\lambda = \widehat{k}(n)$. Montrer que $\widehat{k}(0) = 1/a^2$ est l'unique valeur propre de T de module maximal, caractériser l'espace propre associé et calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(C^0_\#)}$.

3. (7) On pose $V = \left\{ g \in C^0_\# \text{ tel que } \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrer que V est un sous-espace fermé de $C^0_\#$ tel que $T[V] \subset V$.

3. (8) Montrer que pour tout $f \in C^0_\#$ n'appartenant pas à V et $x \in \mathbf{R}$, $T^n[f](x)$ est équivalent à $\frac{1}{a^{2n}}\widehat{f}(0)$ quand $n \to +\infty$.

4 Un théorème de point fixe

Cette partie vise à étendre au contexte de la dimension infinie l'énoncé suivant qui pourra être exploité sans démonstration.

Théorème (Théorème de Brouwer)**.** *Soit F un espace vectoriel normé de dimension* finie. *Soit $C \subset F$ un ensemble convexe, fermé, borné et non–vide. Soit $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet un point fixe dans C.*

4. (1) Dans $\ell^2(\mathbf{N})$ muni de $\|.\|_2$, on considère l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} f : & B(0,1) \subset \ell^2(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbf{N}) \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_0, x_1, x_2, \ldots). \end{array}$$

Montrer que f est continue, à valeurs dans la sphère unité de $\ell^2(\mathbf{N})$ mais que f n'admet pas de point fixe.

4. (2) Soit E un espace vectoriel normé, B un fermé borné et non vide de E et $f : B \to E$ une application (éventuellement non linéaire) *compacte.*

i) Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On peut donc recouvrir $\overline{f(B)}$ par un nombre fini $N_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ de boules de rayon $\frac{1}{n}$; $\overline{f(B)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \mathring{B}(y_i, \frac{1}{n})$ avec $y_i \in \overline{f(B)}$ pour tout i. Pour $y \in E$, on pose

$$\psi_i(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \|y - y_i\| & \text{si } y \in B(y_i, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\Psi : y \in \overline{f(B)} \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(y)$ est continue et qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{f(B)}$ on a $\Psi(y) \geq \delta$.

ii) On introduit l'application $f_n : B \to E$ définie par

$$f_n(x) = \Big(\sum_{i=1}^{N_n} \psi_j(f(x)) \Big)^{-1} \sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(f(x))\; y_i.$$

Montrer que pour tout $x \in B$ on a $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{n}$.

4. (3) Cette question vise à établir le théorème de point fixe suivant

Théorème 2. *Soit B un convexe non-vide, fermé et borné dans un espace vectoriel normé E. Soit $f : B \to B$ une application continue et compacte. Alors f admet un point fixe dans B.*

i) En utilisant les notations de la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ il existe $x_n \in B$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.

ii) En déduire l'existence d'un point fixe de f dans B.

5 Application en théorie spectrale

Cette partie va utiliser les définitions suivantes.

Définition 2. *Soit E un espace de Banach réel. On dit que $\mathcal{C} \subset E$ est un* cône *dans E si*

- *$\mathcal{C}$ est un ensemble fermé contenant 0,*
- *Pour u, v dans $\mathcal{C}$ et α, β réels positifs on a $\alpha u + \beta v \in \mathcal{C}$,*
- *Si $u \in \mathcal{C}$ et $(-u) \in \mathcal{C}$ alors $u = 0$.*

Définition 3. *Soit $\mathcal{C}$ un cône dans un espace de Banach E. On peut définir une relation d'ordre sur E en posant*

$$u \geq v \quad \text{si et seulement si} \quad u - v \in \mathcal{C}.$$

On dit alors qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est positif *si pour tout $u \in \mathcal{C}$ on a $T(u) \in \mathcal{C}$. Si de plus $\mathcal{C}$ est d'intérieur $\mathring{\mathcal{C}}$ non vide, on dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est* fortement positif *si pour tout $u \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ on a $T(u) \in \mathring{\mathcal{C}}$.*

5. (1) Soient a et b deux réels, $a < b$. Dans l'espace $C^0([a, b]; \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs positives ou nulles est un cône $\mathcal{C}$ d'intérieur

$$\mathring{\mathcal{C}} = \big\{ f \in C^0([a, b]; \mathbf{R}) \text{ tel que pour tout } x \in [a, b],\ f(x) > 0 \big\}.$$

♦ Les questions suivantes ont pour objectif, en exploitant le théorème 2, de démontrer l'énoncé suivant, "analogue" en dimension infinie du théorème 1.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{C}$ un cône d'intérieur $\mathring{\mathcal{C}}$ non vide dans un espace de Banach réel $E \neq \{0\}$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et fortement positif. Alors*

i) $\rho := \sup \big\{ |\rho'|$ où $\rho' \in \mathbf{R}$ est valeur propre de $T \big\}$ est valeur propre de T,

ii) il existe un unique $\phi \in \mathring{\mathcal{C}}$ de norme 1 tel que $T\phi = \rho\phi$,

iii) le sous-espace propre associé est de dimension 1: $\dim\big(\mathrm{Ker}(T - \rho\mathbf{1})\big) = 1$,

iv) si $\rho' \in \mathbf{R}$ est une autre valeur propre de T alors on a $|\rho'| < \rho$.

Existence d'un vecteur propre dans $\mathring{\mathcal{C}}$.

On fixe un élément $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$.

5. (2) Montrer qu'il existe $\omega > 0$ tel que $\omega T x \geq x$.

♦ Sans perte de généralité on supposera à partir de maintenant que $\omega = 1$.

5. (3) Soit $\epsilon > 0$. Supposons qu'il existe $M \geq 0$ et $y \in \mathcal{C}$ tels que $y = MT(y + \epsilon x)$. Établir que pour tout entier $n \geq 1$ on a $y \geq \epsilon M^n x$. En déduire que $M \leq 1$.

5. (4) Soit $\epsilon > 0$ et $R > 0$. On pose

$$\mathcal{C}_\epsilon = \big\{y \in \mathcal{C} \text{ tel que } y \geq \epsilon x,\ \|y\| \leq R\big\}, \qquad T_\epsilon : y \in \mathcal{C}_\epsilon \mapsto T_\epsilon(y) = \frac{1}{\|y\|}\, T(y + \epsilon\|y\|x).$$

i) Montrer que $\mathcal{C}_\epsilon$ est un convexe fermé, borné ne contenant pas 0.

ii) Montrer que pour R suffisamment grand, $\mathcal{C}_\epsilon$ est non-vide et T_ϵ est une application de $\mathcal{C}_\epsilon$ dans $\mathcal{C}_\epsilon$ continue et compacte.

♦ On suppose dorénavant que R satisfait cette condition.

iii) En déduire l'existence de $y_\epsilon \in \mathcal{C}_\epsilon$ vérifiant $y_\epsilon = T_\epsilon(y_\epsilon)$. On pose $M_\epsilon = 1/\|y_\epsilon\|$ et $z_\epsilon = y_\epsilon/\|y_\epsilon\|$ de sorte que $z_\epsilon = M_\epsilon T(z_\epsilon + \epsilon x)$. Montrer que $0 \leq M_\epsilon \leq 1$.

iv) Montrer qu'il existe une suite $\big(\epsilon_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 telle que $\big(M_{\epsilon_n}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lambda \in]0,1]$ et $\big(z_{\epsilon_n}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $z \in \mathring{\mathcal{C}}$ vérifiant $z = \lambda T z$ et $\|z\| = 1$.

Unicité.

♦ Jusqu'à la fin de la partie λ et z sont ceux définis en 5.(4)-iv).

5. (5) On suppose qu'il existe $z' \in \mathring{\mathcal{C}}$ et $\mu > 0$ tels que $z' = \mu T z'$. Soit $\mathcal{A} = \{s \geq 0 \text{ tel que } z - sz' \in \mathcal{C}\}$.

i) Montrer que $\mathcal{A}$ est un intervalle fermé, borné, non réduit à $\{0\}$.

ii) En déduire que $\mu = \lambda$.

5. (6) Soit $\nu \in \mathbf{R}$ et $z' \in E$ tels que $z' \notin \mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$ et $z' = \nu T z'$. En considérant les ensembles $\mathcal{B}_+ = \{s \geq 0 \text{ tel que } \ z + sz' \in \mathcal{C}\}$ et $\mathcal{B}_- = \{s \geq 0 \text{ tel que } \ z - sz' \in \mathcal{C}\}$ montrer que $\lambda < |\nu|$ et que $\mathrm{Ker}(\lambda T - \mathbf{1}) = \mathrm{Vect}\{z\}$.

6 Un exemple sur un espace de suites

Soit H un espace de Hilbert complexe dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (linéaire en la seconde variable) ; on rappelle le

Théorème (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Pour toute forme linéaire continue λ sur H, il existe un unique $x_\lambda \in H$ tel que $\lambda(y) = \langle x_\lambda, y \rangle$ pour tout $y \in H$.*

6. (1) Soit $x = \big(x_n\big)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$; pour $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on définit $x^{(p)} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ par : $\forall n \in \mathbf{Z}$, si $n \neq p, x_n^{(p)} = x_n$ et $x_p^{(p)} = -\frac{1}{p}$. Évaluer $\left\|x - x^{(p)}\right\|_2$. En déduire que dans $\big(\ell^2(\mathbf{Z}), \|.\|_2\big)$, l'ensemble des suites à termes réels positifs ou nuls est un cône d'intérieur vide.

♦ Soit $\big(\kappa_n\big)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to\pm\infty} \kappa_n = +\infty$. On désigne par $\mathbf{h}_\kappa$ l'espace des suites complexes $u = \big(u_n\big)_{n\in\mathbf{Z}}$ telles que

$$\big(\mathcal{N}(u)\big)^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (1 + \kappa_n)|u_n|^2 < \infty.$$

6. (2) Montrer que $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$ est un espace de Hilbert.

6. (3) Soit $\mu > 0$; on pose, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$:

$$a(u, v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Big((\mu + \kappa_n)\overline{u_n}v_n + (\overline{u_{n+1}} - \overline{u_n})(v_{n+1} - v_n)\Big).$$

Montrer que cette quantité est bien définie, et qu'il existe deux constantes α, β strictement positives telles que

$$\forall u \in \mathbf{h}_\kappa,\ \alpha\mathcal{N}(u)^2 \leq a(u, u) \leq \beta\mathcal{N}(u)^2.$$

Justifier que $\mathbf{h}_\kappa$ muni du produit scalaire a est encore un espace de Hilbert.

6. (4) On se donne $f = \big(f_n\big)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$. Montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ vérifie

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \mu u_n + \kappa_n u_n - (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = f_n \tag{2}$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa,\ a(u, v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{f_n}v_n. \tag{3}$$

Prouver alors l'existence et l'unicité de $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (2).

6. (5) Soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{h}_\kappa$, bornée dans $\big(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N}\big)$; il existe donc $M \geq 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathcal{N}(u^{(p)}) \leq M$. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite $\big(u^{(p_k)}\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergente dans $\big(\ell^2(\mathbf{Z}), \|.\|_2\big)$. En déduire que l'application $S : f \mapsto u$, avec $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (2), définit un opérateur compact appartenant à $\mathcal{L}\big(\ell^2(\mathbf{Z})\big)$.

6. (6) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est à valeurs réelles, alors $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec $u \in \mathbf{h}_\kappa$ solution de (2) est aussi à valeurs réelles. En utilisant (3) avec $v_n = \min(0, u_n)$, établir que S est un opérateur positif au sens où si $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6. (7) Montrer que S est un opérateur fortement positif au sens où si $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et s'il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $f_{n_0} > 0$ alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6. (8) On note $m = \inf \left\{ a(u,u), u \in \mathbf{h}_\kappa, \left\| u \right\|_2 = 1 \right\}$. On considère une suite $\left(u^{(p)}\right)_{p \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{h}_\kappa$ telle que $\lim\limits_{p \to +\infty} a(u^{(p)}, u^{(p)}) = m$ et $\forall p \in \mathbf{N}, \left\| u^{(p)} \right\|_2 = 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\left(u^{(p_k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ de $\left(u^{(p)}\right)_{p \in \mathbf{N}}$ qui converge dans $\left(\ell^2(\mathbf{Z}), \left\| . \right\|_2\right)$ vers un élément $u^{(\infty)}$ de $\mathbf{h}_\kappa$ tel que $a(u^{(\infty)}, u^{(\infty)}) = m$ et $\left\| u^{(\infty)} \right\|_2 = 1$.

6. (9) En exploitant la relation $a(u^{(\infty)} + tv, u^{(\infty)} + tv) \geq m \left\| u^{(\infty)} + tv \right\|_2^2$ pour tout $v \in \mathbf{h}_\kappa$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, montrer que $Su^{(\infty)} = \frac{1}{m} u^{(\infty)}$.

6. (10) Soit $\lambda \in \sigma(S)$. Montrer que $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{m}$.

6. (11) Montrer que l'espace propre de S associé à la valeur propre $\frac{1}{m}$ est une droite vectorielle engendrée par une suite dont les composantes sont strictement positives. (*Si v appartient à ce sous-espace, on pourra introduire la suite $|v| = \left(|v_n|\right)_{n \in \mathbf{Z}}$.*)