RAPPELS ET NOTATIONS.

L'objet de ce problème est d'étudier les applications Lipschitziennes, non linéaires en général, entre espaces vectoriels normés. Le problème est divisé en six parties. Les quatre premières parties sont indépendantes.

- Dans tout le problème, on considère des **R**- espaces vectoriels normés, dont la norme sera notée $\|\,.\,\|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. La droite réelle **R** sera toujours munie de la valeur absolue $|\,.\,|$.

- Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ est linéaire continue, on note

$$\|f\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

On dit que $\Phi : X \to Y$ est une isométrie si $\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. On notera qu'une telle isométrie n'est pas nécessairement linéaire.

- Soit M un nombre réel positif. Une application $F : X \to Y$ est dite M-Lipschitzienne si

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant M\|x_1 - x_2\|$$

pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. Une application Lipschitzienne est une application qui, pour un certain $M \geqslant 0$, est M-Lipschitzienne.

- Un espace normé X est dit séparable s'il contient une suite dense, ou en d'autres termes une partie dénombrable dense.

- Pour tout espace normé X, on note X^* l'espace dual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de X dans **R**. Pour tout couple $(x^*, x) \in X^* \times X$, on note $x^*(x) =< x^*, x >$. Conformément aux notations ci-dessus, on note

$$\|x^*\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|< x^*, x >|}{\|x\|}.$$

On rappelle que l'espace dual X^* muni de cette norme est un espace de Banach. On notera simplement X^{**} l'espace $(X^*)^*$.

- L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace normé X sera noté $vect[A]$, et sa fermeture sera notée $\overline{vect}[A]$.

- Soit C une partie convexe d'un **R**-espace vectoriel X. On dit que $g : C \to \mathbf{R}$ est convexe si pour tous $(t_1, t_2, ..., t_n, x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n \times C^n$ tels que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, on a

$$g(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i).$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit sur $\mathbf{R}^n$ la norme $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

- Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $x \in \Omega$ et $g : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en x. On note $\{\nabla g\}(x)$ la différentielle de g au point x. Cette différentielle $\{\nabla g\}(x)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$.

- On rappelle le lemme de Baire : si P est un espace métrique complet et si pour tout entier $j \geqslant 1$, V_j est un sous-ensemble ouvert et dense de P, alors l'ensemble $\bigcap_{j\geqslant 1} V_j$ est dense dans P.

- On rappelle enfin que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

.

I. PRÉLIMINAIRES

1. Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application M-Lipschitzienne. Montrer qu'il existe une unique application M-Lipschitzienne $\widetilde{f} : E \to F$ telle que pour tout $a \in A$, on ait $\widetilde{f}(a) = f(a)$ (pour $x \in E$, on pourra considérer une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x, et montrer que la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy).

2. Soit $n \geqslant 1$. On définit $\gamma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = exp(-\pi(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)).$$

a. Montrer que γ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et que l'on a pour tout entier $p \geqslant 1$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, u_2, ..., u_n) du_1 du_2 ... du_n = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) dt_1 dt_2 ... dt_n = 1.$$

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction Lipschitzienne. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$g_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) f(x_1 - t_1, x_2 - t_2, ..., x_n - t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n.$$

b. Montrer que la fonction g_p est bien définie pour tout $p \geqslant 1$, et que la suite de fonctions $(g_p)_{p \geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}^n$.

c. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, la fonction g_p est continûment différentiable sur $\mathbf{R}^n$ (on pourra effectuer le changement de variable $v_1 = x_1 - t_1, ..., v_n = x_n - t_n$).

d. Soit E un espace normé de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On désigne par $Lip_0(E)$ l'espace des fonctions Lipschitziennes f de E dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in Lip_0(E)$, on pose

$$\|f\|_L = sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \; ; \; (x, y) \in E^2, \; x \neq y\}.$$

Montrer que pour toute fonction $f \in Lip_0(E)$, il existe une suite $(h_p)_{p \geqslant 1} \subset Lip_0(E)$ de fonctions continûment différentiables sur E telles que $\|h_p\|_L \leqslant \|f\|_L$ pour tout p, et telles que la suite $(h_p)_{p \geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur E.

II. ISOMÉTRIES ET LINÉARITÉ.

1. On munit dans cette question seulement l'espace $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|(x, y)\|_\infty = max\{|x|, |y|\}$. Soit $f : (\mathbf{R}, |\,.\,|) \to (\mathbf{R}^2, \|\,.\,\|_\infty)$ définie par $f(t) = (t, \; sin(t))$. Montrer que f est une isométrie non linéaire.

2. Soit $\mathscr{H}$ un espace préhilbertien, dont la norme est notée $\|\,.\,\|_2$.

a. Soient x et y deux points de $\mathscr{H}$ et $t \in]0, 1[$ tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|tx + (1 - t)y\|_2$. Montrer qu'alors $x = y$.

b. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de $\mathscr{H}$ tels que $x_1 = x_2 + x_3$ et $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$. Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $x_2 = \lambda x_1$ (on pourra se ramener au cas où les (x_i) sont non nuls et considérer les vecteurs normalisés $((\|x_i\|_2^{-1} x_i))$.

c. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathscr{H}$ une isométrie telle que $\varphi(0) = 0$. Établir que $\varphi(t) = t\varphi(1)$ pour tout $t \geqslant 0$.

d. Soit Y un espace normé, et $\phi : Y \to \mathcal{H}$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que pour tout couple de vecteurs (x, y) dans Y et tout $t \geqslant 0$, on a $\phi(x + ty) = (1 - t)\phi(x) + t\phi(x + y)$.

e. Montrer que ϕ est une application linéaire de Y dans $\mathcal{H}$.

III. DUALITÉ DES ESPACES NORMÉS

1. Soit X un espace normé, H un hyperplan de X, et $u \in X \setminus H$. Soit $h^* \in H^*$ de norme égale à 1. Montrer que

$$\sup_{h_1 \in H} [< h^*, h_1 > - \| h_1 - u \|] \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \| h_2 - u \|].$$

2. Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sup_{h_1 \in H} [< h^*, h_1 > - \| h_1 - u \|] \leqslant a \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \| h_2 - u \|].$$

a. On définit $x^* : X \to \mathbf{R}$ comme suit : pour tout $(h, t) \in H \times \mathbf{R}$, $< x^*, h + tu >=< h^*, h > + ta$. Montrer que $x^* \in X^*$ et que $\| x^* \| = 1$.

b. Soit E un espace normé de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que pour tout $x^* \in F^*$, il existe $y^* \in E^*$ tel que $\| y^* \| = \| x^* \|$ et tel que $< y^*, x >=< x^*, x >$ pour tout $x \in F$.

Dans toute la suite de cette partie, X désignera un espace normé de dimension infinie, supposé séparable. On notera $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dense dans X.

3. Soit $x \in X$.

a. Montrer qu'il existe une suite croissante $(E_k)_{k \geqslant 0}$ de sous-espaces de dimension finie de X tels que $x \in E_0$ et tels que la réunion $V = \bigcup_{k \geqslant 0} E_k$ soit dense dans X.

b. Montrer qu'il existe $v^* \in V^*$ de norme 1 tel que $< v^*, x >= \| x \|$ (on pourra utiliser le III.2.b)).

c. Montrer qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, x >= \| x \|$.

4. Soit $J_X : X \to X^{**}$ définie pour tout $(x, x^*) \in X \times X^*$ par $< J_X(x), x^* >=< x^*, x >$. Montrer que J_X est une isométrie linéaire.

5. a. Soit $(x_n^*)_{n \geqslant 1}$ une suite de X^* telle que $\| x_n^* \| \leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)}^*)$ de (x_n^*) telle que

$$\lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, x_k >$$

existe pour tout $k \geqslant 1$.

b. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, z >$$

existe pour tout $z \in X$.

c. On pose $< x^*, z >= \lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, z >$. Montrer que l'application x^* ainsi définie est une forme linéaire et que $\| x^* \| \leqslant 1$.

6. Soit $j : \mathbf{R} \to X$ une isométrie telle que $j(0) = 0$.

a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $x_k^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x_k^*, j(k) - j(-k) >= 2k$.

b. Montrer que $< x_k^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in [-k, k]$.

c. En déduire qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

IV. DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS CONVEXES

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $a < b < c$ trois nombres réels. Montrer que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

b. Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la dérivée à gauche $f'_g(x)$ et la dérivée à droite $f'_d(x)$ de f en x existent, que $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$, et que si $x_1 < x_2$, on a

$$f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2).$$

c. Montrer que f est continue, et que le sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathbf{R}$ constitué des points où f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable (on vérifiera l'existence de $\psi : \mathscr{S} \to \mathbf{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{S}$, $\psi(x) \in]f'_g(x), f'_d(x)[$).

d. Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit $\tau : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ par

$$\tau(t) = [f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)]/t.$$

Montrer que τ est impaire et croissante sur $\mathbf{R}^*$, puis que f est dérivable en x si et seulement si

$$\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = 0.$$

2. Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ tel que $(-x) \in C$ pour tout $x \in C$, et $F : C \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On suppose que $F(0) = 0$ et que F est majorée sur C. Montrer que

$$\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|.$$

3. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha > 0$.

On note $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{\|h\|_1 \leqslant \alpha} g(x + h) - g(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, |\varepsilon| = 1} g(x + \varepsilon \alpha e_i) - g(x).$$

b. Montrer que g est continue en tout point x de $\mathbf{R}^n$.

4. Soient $k \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $t > 0$. On pose

$$O_{k,i}(t) = \left\{x \in \mathbf{R}^n \; ; \; \frac{g(x + te_i) + g(x - te_i) - 2g(x)}{t} < \frac{1}{k}\right\}$$

et

$$V_{k,i} = \bigcup_{t > 0} O_{k,i}(t).$$

a. Montrer que l'ensemble $V_{k,i}$ est ouvert.

b. Soit

$$\Delta_i = \bigcap_{k \geqslant 1} V_{k,i}.$$

Montrer que $\Delta_i = \{x \in \mathbf{R}^n \; ; \; \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe}\}$.

c. Montrer que Δ_i est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on pourra utiliser la Question IV.1.c).

5. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_g = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta_i$$

est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on remarquera que chaque ensemble Δ_i est une intersection dénombrable d'ouverts).

6. Soit $x \in \Omega_g$. On définit la fonction G par $G(y) = g(y) - g(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$.

a. Montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}^n$,

$$|G(x+h)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n, |\varepsilon|=1} G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i).$$

b. En déduire que Ω_g est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ en lesquels la fonction g est différentiable.

7. Soit $\| \,.\, \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$.

a. Justifier que $\| \,.\, \|$ est convexe, que $0 \notin \Omega_{\| \,.\, \|}$, que pour tout $x \in \Omega_{\| \,.\, \|}$ et tout $t > 0$, on a $tx \in \Omega_{\| \,.\, \|}$ et que $\{\nabla \| \,.\, \|\}(tx) = \{\nabla \| \,.\, \|\}(x)$.

b. Montrer que pour tout $x \in \Omega_{\| \,.\, \|}$, on a $\|\{\nabla \| \,.\, \|\}(x)\| = < \{\nabla \| \,.\, \|\}(x), \dfrac{x}{\|x\|} >= 1$.

c. Soit $z \in \mathbf{R}^n$. Soit $(x_p)_{p \geqslant 1}$ une suite de points de $\Omega_{\| \,.\, \|}$ qui converge vers z. Montrer que

$$\lim_{p \to \infty} < \{\nabla \| \,.\, \|\}(x_p), z >= \|z\|.$$

V. LE THÉORÈME DE FIGIEL

Dans cette partie, E désigne un espace normé de dimension finie N. Soit, dans les questions V.1 et V.2, un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. On suppose de plus que x est un point de différentiabilité de la norme $\| \,.\, \|$ de E.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une application 1-Lipschitzienne telle que $\varphi(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Soit $y \in E$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, on a

$$1 = |t\varphi(y) - t\varphi\big((\varphi(y) + 1/t)x\big)| \leqslant \|x - t(y - \varphi(y)x)\|.$$

b. En déduire que $< \{\nabla \| \,.\, \|\}(x), y - \varphi(y)x >= 0$, puis que $\{\nabla \| \,.\, \|\}(x) = \varphi$.

2. Soit F un espace normé séparable et soit $\phi : E \to F$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$.

a. Montrer qu'il existe $f_x^* \in F^*$ de norme 1 tel que $< f_x^*, \phi(tx) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (on utilisera la Question III.6.c)).

b. Montrer que $f_x^* \circ \phi = \{\nabla \| \,.\, \|\}(x)$.

Pour $x' \in \Omega_{\|\,.\,\|}$, on considère plus généralement $f^*_{x'} \in F^*$ de norme 1 telle que $f^*_{x'} \circ \phi = \{\nabla \|\,.\,\|\}(x')$.

3. a. Montrer que pour tout $z \in E \setminus \{0\}$, il existe un point $x' \in \Omega_{\|\,.\,\|}$ tel que $\{\nabla \|\,.\,\|\}(x')(z) \neq 0$ (on utilisera la Question IV.7.c)).

b. En déduire qu'il existe des points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de $\Omega_{\|\,.\,\|}$ tels que la famille des différentielles $\big(\{\nabla \|\,.\,\|\}(x_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ soit une base de E^*.

c. Montrer qu'il existe une base $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ de E telle que

$$\{\nabla \|\,.\,\|\}(x_i)(z_j) = \delta_{i,j}.$$

D'après la Question V.2.b), pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, il existe $f^*_{x_i} \in F^*$ tel que

$$\{\nabla \|\,.\,\|\}(x_i) = f^*_{x_i} \circ \phi.$$

On définit une application $T : F \to E$ par

$$T(y) = \sum_{i=1}^{N} f^*_{x_i}(y) z_i.$$

d. Montrer que T est linéaire continue et que $T \circ \phi = Id_E$.

4. On suppose dans cette question que $\overline{vect}[\phi(E)] = F$.

a. Montrer que pour tout $x' \in \Omega_{\|\,.\,\|}$, on a

$$f^*_{x'} = \{\nabla \|\,.\,\|\}(x') \circ T.$$

b. Montrer que $\|T\| = 1$ (pour $y \in F$, on pourra poser $z = T(y)$ et utiliser la Question IV.7 .c)).

5. On suppose à présent que X est un espace de Banach séparable de dimension infinie. D'après la Question III.3.a), on a

$$X = \overline{\bigcup_{k \geqslant 1} E_k}$$

où $(E_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Soit Y un espace normé, et soit $\Phi : X \to Y$ une isométrie telle que $\Phi(0) = 0$ et $\overline{vect}[\Phi(X)] = Y$. On pose $F_k = vect[\Phi(E_k)]$.

a. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $T_k : F_k \to E_k$ telle que pour tout $x \in E_k$, $T_k(\Phi(x)) = x$, et que $\|T_k\| = 1$.

b. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : Y \to X$ telle que $T \circ \Phi = Id_X$, et que $\|T\| = 1$.

6. **Applications :**

a. On munit $\mathbf{R}^2$ d'une norme arbitraire. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une isométrie. Montrer qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbf{R}^2$ et une application Lipschitzienne φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $f(t) = t\varepsilon_1 + \varphi(t)\varepsilon_2$.

b. Montrer le théorème de Mazur-Ulam : si X et Y sont des espaces de Banach séparables, toute surjection isométrique $\Phi : X \to Y$ telle que $\Phi(0) = 0$ est linéaire.

VI. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit X un espace normé séparable de dimension infinie. On désigne par $Lip_0(X)$ l'espace vectoriel des fonctions Lipschitziennes f de X dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in Lip_0(X)$, on pose

$$\|f\|_L = sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}\ ;\ (x,y)\in X^2,\ x\neq y\}.$$

On vérifie facilement que $\|\ .\ \|_L$ est une norme sur $Lip_0(X)$, que le dual X^* de X est un sous-espace de $Lip_0(X)$ et que $\|x^*\| = \|x^*\|_L$ pour tout $x^* \in X^*$.

1. Pour tout $\mu \in Lip_0(X)^*$, on note $\beta(\mu)$ la restriction de μ à X^*. Montrer que β est une application linéaire continue de $Lip_0(X)^*$ dans X^{**} et que $\|\beta\| = 1$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ de vecteurs de X linéairement indépendants tels que $\overline{vect}[(x_i)_{i\geqslant 1}] = X$ et $\|x_i\| = 2^{-i}$ pour tout i.

On pose $E_k = vect[\{x_i\ ;\ 1\leqslant i\leqslant k\}]$.

On considère l'unique application linéaire $R_k : E_k \to Lip_0(X)^*$ qui satisfait pour tout $1\leqslant n\leqslant k$ et toute $f\in Lip_0(X)$

$$R_k(x_n)(f) = \int_{[0,1]^{k-1}} \left[f(x_n + \sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j) - f(\sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j)\right] dt_1 dt_2 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k\ .$$

3. Soit $f\in Lip_0(X)$. On note f_k la restriction de f à E_k. Montrer que si f_k est continûment différentiable, on a pour tout $x\in E_k$

$$R_k(x)(f) = \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^{k} t_j x_j), x > dt_1 dt_2 ... dt_k.$$

4. Montrer que

$$\|R_k\| \leqslant 1$$

(On utilisera la Question I. 2. d).

5. a. Montrer que si $1\leqslant n\leqslant k$, on a

$$\|R_{k+1}(x_n) - R_k(x_n)\| \leqslant 2\|x_{k+1}\|.$$

b. Montrer que pour tout $x\in E_k$, la suite $(R_l(x))_{l\geqslant k}$ converge dans l'espace de Banach $Lip_0(X)^*$.

6. On pose $C = \bigcup_{k\geqslant 1} E_k$. La Question VI.5 permet de définir pour tout $x\in C$

$$R(x) = \lim_{l\to\infty} R_l(x).$$

a. Montrer que R est une application linéaire continue de C dans $Lip_0(X)^*$ telle que $\|R\| = 1$ et $\beta\circ R(x) = J_X(x)$ pour tout $x\in C$ (l'application β est définie à la Question VI.1).

b. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $\overline{R} : X \to Lip_0(X)^*$ telle que $\|\overline{R}\| = 1$ et $\beta\circ\overline{R} = J_X$.

Soient Y un espace de Banach et $Q : Y \to X$ une application linéaire continue, telle qu'il existe une application M-Lipschitzienne $\mathscr{L} : X \to Y$ telle que $Q\circ\mathscr{L} = Id_X$ et $\mathscr{L}(0) = 0$. On admettra que l'équation

$$< S(x), y^* > = < \overline{R}(x), y^*\circ\mathscr{L} >$$

où $y^* \in Y^*$ et $\overline{R}$ est définie à la Question VI. 6. b) ci-dessus, définit une application linéaire continue $S : X \to Y$ telle que $Q \circ S = Id_X$ et telle que $\|S\| \leqslant M$.

7. Montrer que si X est un espace de Banach séparable, et s'il existe une isométrie Φ de X dans un espace de Banach Y, alors Y contient un sous-espace vectoriel fermé linéairement isométrique à X.