Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Notations et définitions

– Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^p$, on note C_Ω l'espace vectoriel des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
– Dans tout le problème, on appellera *difféomorphisme* entre deux ouverts de $\mathbf{R}^p$ une bijection entre ces deux ouverts qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ ainsi que sa réciproque.
– Si I est un intervalle on note I^2 le carré $I \times I$ de $\mathbf{R}^2$.
– Soit I un intervalle ouvert et f un élément de C_I . On dit que $x_0 \in I$ est un *point critique* de f si $f'(x_0) = 0$. Une *valeur critique* de f est un réel de la forme $f(x_0)$ où x_0 est un point critique. On dit qu'un point critique x_0 est *non dégénéré* si $f''(x_0)$ est non nul.
– Si A et B sont deux parties du plan $\mathbf{R}^2$ on dira que A et B sont *de même type* s'il existe deux intervalles ouverts I et J et un difféomorphisme ϕ de I^2 sur J^2 tels que :

$$A \subset I^2, \qquad B \subset J^2, \qquad \phi(A) = B$$

Objet du problème

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Pour toute fonction f élément de C_I, et pour tout réel λ on définit la partie de $\mathbf{R}^2$:

$$E_\lambda(f) = \{(x, y) \in I^2, f(x) + f(y) = \lambda\}$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés des ensembles $E_\lambda(f)$.

I. Préliminaires et exemples

I.A. Généralités

1. Soit I un intervalle ouvert quelconque de $\mathbf{R}$, et f un élément de C_I.
   (a) Déterminer $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$ (pour λ, μ distincts) et $\cup_{\lambda \in \mathbf{R}} E_\lambda(f)$.
   (b) Démontrer que pour tout λ, $E_\lambda(f)$ est un fermé de I^2, et trouver une symétrie commune à tous les $E_\lambda(f)$.

   (c) Soit $x_0 \neq 0$. On pose $g(x) = f(x + x_0)$. Préciser l'intervalle de définition de g. Quelle transformation géométrique envoie $E_\lambda(g)$ sur $E_\lambda(f)$?

2. Déterminer selon la valeur de λ, l'ensemble $E_\lambda(f)$ lorsque la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
3. On prend dans cette question la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^3$. Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion d'une droite et d'une ellipse.
4. On prend dans cette question la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - x^3$.
   Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion du point $(0,0)$ et d'une courbe dont on donnera une équation polaire et qu'on tracera sommairement, par exemple à l'aide d'une calculatrice graphique.

I.B. Racine carrée d'une fonction positive

5. Dans cette question, on note $I =]a, b[$ un intervalle contenant 0 ($a, b \in \overline{\mathbf{R}}$). On suppose de plus que la fonction $f \in C_I$ vérifie l'hypothèse suivante :

   (H) 0 est l'unique point critique de f et il est non dégénéré ; on a $f(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

   (a) Expliciter les variations de f.

   (b) On pose $g(x) = \int_0^1 (1-u) f''(xu)du$.
   Établir l'égalité $f(x) = x^2 g(x)$.

   (c) Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et strictement positive sur $]a, b[$.

   (d) Construire une fonction h croissante et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I telle que pour tout x on ait $f(x) = h(x)^2$. Justifier que h est un difféomorphisme de I sur un intervalle J qu'on précisera en fonction de f.

Définition : *la fonction h ainsi définie sera appelée racine carrée de f.*

I.C. Ovales du plan

On reprend les notations de la question **5.** en supposant toujours que f vérifie l'hypothèse **(H).**

6. En utilisant la racine carrée de f, démontrer que pour $\lambda > 0$ l'ensemble $E_\lambda(f)$ est de même type que l'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ et du carré J^2.

Définition : *dans la suite du problème, on appellera* ***ovale*** *toute partie du plan qui est de même type qu'un cercle.*

7. Une application

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) &= -y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable t. Soit $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, (x_0, y_0) \neq (1,1)$.

On note : $t \to (x(t), y(t))$ l'unique solution maximale de (S) vérifiant $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

   (a) Établir que les fonctions x et y ne peuvent pas s'annuler.

   (b) Démontrer que le support de l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$ est inclus dans un ovale que l'on caractérisera à l'aide de x_0, y_0 et de la fonction g définie pour $x > 0$ par $g(x) = x - 1 - \ln(x)$.

II. Un problème de dénombrement

On rappelle le résultat suivant : *si $z \to g(z)$ est une fonction d'une variable complexe holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon r, alors elle est somme sur ce disque ouvert d'une série entière convergente.*

1. On pose, pour tout $z \in \mathbf{C}, \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(z) = 0$.
   (b) Établir l'existence d'une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres **réels** tels que pour tout complexe z de module assez petit on ait :
   $$\frac{\sin(z)+1}{\cos(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$
   (il n'est pas demandé de calculer les coefficients b_n).
   (c) Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbf{C} \setminus \{z, \cos(z) = 0\}$ par $H(z) = \frac{\sin(z)+1}{\cos(z)} + \frac{4}{2z-\pi}$ possède un prolongement holomorphe sur le disque ouvert $\left\{z, |z| < \frac{3\pi}{2}\right\}$.
   (d) En déduire que $b_n \sim \frac{2^{n+2} n!}{\pi^{n+1}}$.

2. Permutations alternantes

On donne $a_0, \dots, a_{n-1}$, n nombres réels distincts rangés par ordre croissant : $a_0 < \dots < a_{n-1}$. Soit σ une permutation de l'ensemble $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. On dit que σ est *alternante* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$\sigma(a_{2i}) < \sigma(a_{2i+1})$ pour tout i tel que $0 < 2i+1 \leqslant n-1$
$\sigma(a_{2i-1}) > \sigma(a_{2i})$ pour tout i tel que $0 < 2i \leqslant n-1$

On dit que σ est *antialternante* si elle vérifie les inégalités inverses. On note e_n le nombre de permutations alternantes (par convention $e_0 = e_1 = 1$).

(a) Déterminer toutes les permutations alternantes ainsi que l'entier e_n lorsque $n = 2, 3$ ou 4.
(b) Démontrer qu'il y a (pour $n \geqslant 2$) autant de permutations alternantes que de permutations anti-alternantes.
(c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} e_i e_{n-i}$$

Indication : *pour une permutation σ de $\{a_0, \dots a_n\}$, on pourra considérer l'indice j tel que $\sigma(a_j) = a_0$.*

(d) En conclure que pour tout n, $e_n = b_n$.

III. Les serpents d'Arnold

Dans cette partie, $I = \mathbf{R}$.

On se propose d'étudier la topologie de $E_\lambda(f)$ pour une famille de fonctions appelées *serpents d'Arnold*. Un entier $n > 0$ étant donné, on fixe n réels $a_0 < \dots < a_{n-1}$ tels que les sommes $a_i + a_j$ pour $i \leqslant j$ soient toutes distinctes.

On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans lui même qui vérifient les propriétés suivantes :

– f est de classe $\mathscr{C}^\infty$;

– f possède exactement n points critiques, $x_0(f) < \ldots < x_{n-1}(f)$ et ils sont tous non dégénérés ;
– Les valeurs critiques de f sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$.
Autrement dit, il existe une permutation σ_f de $a_0, \ldots, a_{n-1}$ telle que, pour tout i, $f\big(x_i(f)\big) = \sigma_f(a_i)$. La permutation σ_f s'appelle permutation associée à f ;
– $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$;
– $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Définition : *un élément f de $\mathscr{A}_n$ s'appelle un serpent à n points critiques.*

Remarque : pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $x_0, \ldots, x_{n-1}$ les points critiques de f. De même, la notation $\mathscr{A}_n$ est en réalité une abréviation pour $\mathscr{A}_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Classes d'équivalence de serpents

1. Soit $f \in \mathscr{A}_n$. Préciser les variations de f selon la parité de n.
2. (a) Démontrer que la relation $\sim$ définie par « $f \sim g$ si et seulement s'il existe un difféomorphisme croissant h de $\mathbf{R}$ tel que $f = g \circ h$ » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{A}_n$.
   (b) Démontrer que si $f \sim g$ alors pour tout λ, $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(g)$ sont de même type.
3. Soit h un difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$. Démontrer que $f \in \mathscr{A}_n \Leftrightarrow f \circ h \in \mathscr{A}_n$, et qu'alors $\sigma_f = \sigma_{f \circ h}$.
4. Réciproquement on suppose que f et g sont deux éléments de $\mathscr{A}_n$ qui vérifient $\sigma_f = \sigma_g$.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique bijection h croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f = g \circ h$ et $h(x_k(f)) = x_k(g)$.
   (b) En utilisant la partie I, démontrer que h est un difféomorphisme.
5. (a) Démontrer que le nombre de classes d'équivalence de $\sim$ est majoré par l'entier b_n défini dans la partie **II**.
   (b) On admet que si $[\lambda, \mu]$ ne contient aucun élément $a_i + a_j$, les ensembles $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont de même type. En déduire un majorant du nombre de types des $E_\lambda(f)$, lorsque λ parcourt $\mathbf{R}$ et f parcourt $\mathscr{A}_n$.

Topologie de $E_\lambda(f)$ dans le cas non critique

On se propose dans les questions qui suivent de décrire la topologie de $E_\lambda(f)$ lorsque f est un élément de $\mathscr{A}_n$ et que le réel λ n'est pas de la forme $a_i + a_j$.

On note $I_0 =]-\infty, x_0]$, $I_n = [x_{n-1}, \infty[$, et pour k variant de 1 à $n-1$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

6. Sous-graphes
   (a) Vérifier que $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est, pour tout (i, j), l'ensemble vide ou le graphe d'une fonction strictement monotone continue définie sur un intervalle fermé inclus dans I_i.

Définition : *lorsque l'intersection $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est non vide, on convient de l'appeler un* ***sous-graphe*** *de $E_\lambda(f)$.*

   (b) Démontrer que les extrémités du sous-graphe $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ sont sur la frontière du rectangle $I_i \times I_j$.
   (c) Démontrer que chaque extrémité d'un sous-graphe appartient à exactement un autre sous-graphe et que deux sous-graphes ne peuvent avoir d'autre point commun qu'une extrémité.
   (d) Démontrer que, si n est impair, tous les sous-graphes sont bornés et que si n est pair il y en a exactement 2 qui sont non bornés.

7. Composantes connexes de $E_\lambda(f)$

   (a) Démontrer que toute composante connexe est une union $\cup_{i=1}^{p} S_i$ de sous-graphes tels que S_i et S_{i+1} (pour i variant de 1 à $p-1$) ont une extrémité commune.

   (b) En déduire que lorsque n est pair il y a exactement une composante connexe non bornée.

   (c) Lorsque C est une composante connexe bornée, construire une bijection continue du cercle unité S^1 sur C

On peut alors démontrer, mais nous ne le ferons pas, que C est un ovale.

8. Démontrer que le nombre d'ovales est inférieur ou égal à $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$ (où $[\,.\,]$ désigne la partie entière).
9. Dans cette question on choisit $n=2$.

   (a) Illustrer le fait que les composantes ne sont pas forcément des ovales lorsque λ est l'un des a_i+a_j

   (b) Démontrer qu'il y a au maximum 4 ensembles $E_\lambda(f)$ de types différents quand λ décrit $\mathbf{R}$.

IV. Réalisation polynomiale des serpents

On garde les notations de la partie précédente. L'entier n est supposé supérieur ou égal à 2. On souhaite démontrer le théorème **(*T*)** suivant, dû au mathématicien René Thom :

(*T*) *Pour toute $f \in \mathscr{A}_n$ il existe un polynôme P de degré $n+1$ tel que $f \sim P$.*

Il en résulte que les différents ensembles $E_\lambda(f)$ vus ci-dessus sont tous de même type qu'une courbe algébrique.

Notations

On note Ω_1 et Ω_2 les deux ouverts de $\mathbf{R}^{n-1}$ définis par :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ 0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}\right\},\\
\Omega_2 &= \left\{(y_1,\dots,y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ 0<y_1,\ \text{et pour tout } i>0,\ y_{2i-1}>y_{2i} \text{ et } y_{2i}<y_{2i+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Si $x=(x_1,\dots,x_{n-1})$ est un élément de Ω_1, on note P_x le polynôme de degré n défini par

$$P_x(t) = t(x_1-t)\cdots(x_{n-1}-t)$$

Enfin, pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, on définit un polynôme $Q_{i,x}$ en posant $Q_{i,x}(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{P_x(u)}{x_i-u}du$.

A. Deux lemmes de topologie et un d'algèbre

1. Soient U et V deux ouverts connexes de $\mathbf{R}^{n-1}$ et ϕ une application continue de U dans V. On fait les deux hypothèses suivantes :

   H1 : l'image par ϕ de tout ouvert de U est un ouvert de V ;

   H2 : l'image réciproque par ϕ de tout compact de V est un compact de U.

   Démontrer que ϕ est surjective.
2. Soit E_n l'ensemble des polynômes unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n à coefficients réels. Démontrer que $\inf_{P\in E_n}\int_0^1 |P(t)|dt$ est un réel **strictement** positif.
   Dans la suite, on notera $C=\inf_{P\in E_n}\int_0^1 |P(t)|dt$.

3. Soient $R_1,\dots,R_{n-1}$, $n-1$ polynômes de degré inférieur ou égal à $n-2$, linéairement indépendants et $(t_1,\dots,t_{n-1})$, $n-1$ réels distincts. Démontrer que le déterminant $\det(R_i(t_j))$ est non nul.

B. Le théorème (T)

Soit Φ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \to & \Omega_2 \\ x & \mapsto & \left(\int_0^{x_1} P_x(t)dt,\dots,\int_0^{x_{n-1}} P_x(t)dt\right) \end{array}$$

Afin d'alléger les notations, le vecteur $\Phi(x)$ sera noté $(y_1,\dots,y_{n-1})$.

4. Justifier que cette application est bien définie, exprimer ses dérivées partielles en fonction des polynômes $Q_{i,x}$ et en déduire que Φ vérifie l'hypothèse **H1**.
5. Pour $x \in \Omega_1$ démontrer l'inégalité :

$$\left| y_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (y_{i+1} - y_i) \right| \geqslant C(x_{n-1})^{n+1}.$$

6. Démontrer que Φ vérifie l'hypothèse **H2** et en déduire le théorème ***(T)***.