J. 0317

SESSION DE 2000

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Définitions et notations

On notera pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{C}_c^k$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, mesurable telle que $||f||_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx < +\infty\}$ et l'ensemble $L^p(\mathbb{R}^n)$ des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ par la relation $\mathcal{R}$, où $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x pour la mesure de Lebesgue.

On désigne par E l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'intervalles bornés.

L'espace $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(u|v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v}(x)dx$ et $||u||_{L^2} = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. On admet que pour $k \in \mathbb{N}$, $L^1(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{C}_c^k}$ pour la norme $||.||_{L^1}$.(Pour un ensemble A, $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A).

Les parties III, IV sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra admettre le résultat d'une question dans les suivantes en indiquant précisement ce qui est admis.

Partie I

1) Démontrer que

   a) $L^2 = \overline{E}$,

   b) $L^2 = \overline{\mathcal{C}_c^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2) On définit pour $u \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy}u(y)dy$.

   a) Démontrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-cos(\alpha x))}{x^2}dx$ existe et que $I(\alpha) = \pi|\alpha|$.

   b) Démontrer que $\forall (u,v) \in E^2$, $(\tilde{u}|\tilde{v}) = (u|v)$.

3) Conclure qu'il existe une application Θ :

$$\begin{array}{ccc} L^2 & \longrightarrow & L^2, \\ u & \longmapsto & \hat{u} \end{array}$$

telle que :

   i) $\forall u \in E$, $\hat{u} = \tilde{u}$,

   ii) $\forall (u,v) \in (L^2)^2$, $(\hat{u}|\hat{v}) = (u|v)$ et $||\hat{u}||_{L^2} = ||u||_{L^2}$.

4) a) Montrer que $\forall u \in L^2 \cap L^1$, il existe une suite $(u_n) \in E$ et $U \in L^1$ telle que, lorsque n tend vers l'infini,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2, \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^1,$$
$$\text{et pour presque tout } x, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \quad |u_n(x)| \leq |U(x)|.$$

b) Montrer que $\forall u \in L^2 \cap L^1$,

$$\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u(y) dy$$

pour presque tout x.

Ainsi si $u \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u(y) dy$$

est un représentant noté désormais $\hat{u}$ de $\Theta(u) \in L^2$.

c) Démontrer que pour $u \in E$, $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$ pour presque tout x. On pourra dériver $f_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi xy} \hat{u}(y) dy$ où u est la fonction caractéristique d'un intervalle $[a, b]$, et étudier $\lim_{n \to +\infty}(f_n(x_1) - f_n(x_2))$.

En déduire que pour $u \in L^2$, $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$ pour presque tout x. On pourra utiliser la question I.1 a).

Partie II

1) a) Pour $u_0 \in L^2$, démontrer qu'il existe une fonction $u(t) \in L^2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$: $x \longrightarrow u(t, x)$ telle que $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$u(0)(y) = u_0(y), \tag{1}$$
$$\widehat{u(t)}(y) = e^{-i4\pi^2 t y^2} \hat{u}_0(y). \tag{2}$$

On notera $u(t, x) = u(t)(y)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

b) Démontrer que $J = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ix^2} dx$ existe et calculer sa valeur. On utilisera pour cela, l'application $h : z \longrightarrow e^{-z^2}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et le théorème des résidus après l'avoir énoncé. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Montrer que si $u_0 \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$, alors $u_0 \in L^2 \cap L^1$ et $\hat{u}_0 \in L^2 \cap L^1$.

d) Démontrer que pour tout $u_0 \in L^2 \cap L^1$ et $t \in \mathbb{R}^*$,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{i(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}} u_0(z) dz, \tag{3}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et pour une définition $(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}$ que l'on précisera. De même que précédemment on supposera à partir de maintenant la relation (3) vraie pour tout x.

Dans la suite du problème, on dira qu'une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ (t,x) & \longrightarrow & u(t,x), \end{array}$$

est *solution de* (S) *sur* $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $u_0 \in L^2$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) : x \to u(t,x)$ vérifie les relations $(1), (2)$ du II.1 a). On notera que si $u_0 \in L^2 \cap L^1$ alors pour $(t,x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $u(t,x)$ vérifie la relation (3).

On dira que u_0 est la donnée initiale de la solution $u(t)$. On considère, dans la suite de la partie II, une solution $u(t,x)$ de (S) sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $||u(t)||_{L^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire que pour une donnée initiale $u_0 \in L^2$, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de (S) de donnée initiale u_0.

3) Exprimer la solution $v(t,x)$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation (S) avec pour donnée initiale $V_0(x)$ en fonction de $u(t,x)$ dans les cas suivants:
i) $V_0(x) = u_0(x - x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$,
ii) $V_0(x) = \lambda_0^{\frac{1}{2}} u_0(\lambda_0 x)$ pour $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$.

4) a) Pour $c \in \mathbb{R}$, montrer que $v(t,x) = e^{icx - ic_1 t} u(t, x - c_2 t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (S), où c_1 et c_2 sont des éléments de $\mathbb{R}$ à définir en fonction de c. Exprimer dans ce cas $v(0,x)$ en fonction de $u_0(x)$.

b) Montrer que l'équation (S) admet une solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ la relation $v(t,x) = \frac{1}{(it)^{1/2}} e^{+i\frac{x^2}{4t}} \overline{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right)$ pour une condition initiale $v_0(x) = v(0,x)$ qui sera exprimée á l'aide de $\hat{u}_0$. On commencera par écrire pour $u_0 \in L^2 \cap L^1$, $\overline{u}\left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right)$ en utilisant la formule (3).

Partie III

Le but de cette section est de démontrer que si $u(t,x)$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$, alors $u(t,x) \in L^6(\mathbb{R}^2)$ et il existe une constante universelle C(S) telle que

$$\forall u_0 \in L^2, \int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dx dt \leq C(S) \{ \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx \}^3.$$

Dans cette partie, $u(t,x)$ désigne une solution de (S) sur $\mathbb{R}$ et u_0 sa donnée initiale.

1) Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (t,x) & \longrightarrow & f(t,x), \end{array}$$

telle que

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2), \qquad f \in L^6(\mathbb{R}^2),$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t,.) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(t,x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} f(0,x)^2 dx.$$

On suppose dans les questions 2), 3), 4) que $\hat{u}_0 \in {\mathcal{C}_c}^0(\mathbb{R})$.

2) Démontrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dxdt = \int_{\mathbb{R}^2} |\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \hat{u}_0(\xi)\hat{u}_0(\eta) d\xi d\eta|^3 dxdt.$$

3) Démontrer qu'il existe une constante C_1 independante de u, telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{u}_0(\xi)|^{\frac{3}{2}} |\hat{u}_0(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta.$$

On utilisera sans le démontrer le résultat suivant: si une fonction $H \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \hat{H}(y_1,y_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(y_1 u + y_2 v)} H(u,v) dudv,$$

et si $H \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$ alors $\hat{H} \in L^3(\mathbb{R}^2)$ et il existe une constante universelle C_2 telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{H}(y_1,y_2)|^3 dy_1 dy_2 \leq C_2 \{\int_{\mathbb{R}^2} |H(u,v)|^{\frac{3}{2}} dudv\}^2.$$

4) En conclure que si $u(t,x)$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ (toujours avec $\hat{u}_0 \in {\mathcal{C}_c}^0(\mathbb{R})$), alors $u(t,x) \in L^6(\mathbb{R}^2)$ et il existe une constante universelle C(S) telle que :

Tournez la page S.V.P.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dxdt \leq C(S)\{\int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx\}^3.$$

On utilisera sans le démontrer le fait suivant: pour une fonction $w \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une constante universelle C_3 telle que

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \frac{|w(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}} d\eta)^4 d\xi \leq C_3\{\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 dx\}^3.$$

5) On admet que le resultat de la question III.4 s'étend au cas où $u_0 \in L^2$.

En appliquant l'estimation obtenue dans III.4 à la fonction $v(t,x)$ définie dans la question I.4 b), obtient-on une estimation différente pour

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dxdt \ ?$$

Partie IV

1) a) On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$. Démontrer que si $u(t,x)$ désigne la solution de (S) sur $\mathbb{R}$ associée à la donnée initiale u_0, on a les propriétés suivantes :

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*,\ u(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),$$

$$\text{et} \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où $u(t) : x \longrightarrow u(t,x)$.

b) Montrer que $\lim_{t\to 0} u(t)$ existe dans L^2 et donner cette limite.

Par extension dans la suite du problème, on dira que pour $T > 0$ une fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,T] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ (t,x) & \longrightarrow & u(t,x), \end{array}$$

est *solution sur* $[0,T]$ *de* (N) si et seulement si

$$u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}), \quad \forall t \in [0,T],\ u(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

$$\text{et} \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},\ i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^4 u,$$

où, pour $t \in [0,T], u(t)$ désigne l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & u(t,x). \end{array}$$

La fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par la relation $u_0(x) = u(0,x)$ est par définition dans ce cas la donnée initiale de la solution $u(t)$. On admet que pour tout $T > 0$ et $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ donnés, toute solution de (N) sur $[0,T]$ associée à u_0 si elle existe, est unique.

2) Exhiber une fonction explicite à valeurs réelles $Q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$Q \neq 0, \quad Q \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, Q'' + Q^5 = Q,$$

où Q'' désigne la dérivée seconde de Q. On cherchera $Q(x)$ sous la forme $\frac{\alpha}{(ch(\beta x))^\gamma}$ où α, β, γ sont des constantes réelles à déterminer.

3) Démontrer que la fonction définie pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ par

$$P(t,x) = e^{it}Q(x)$$

est une solution de (N) sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $T > 0$, on définit la fonction $S(t,x)$ pour $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}$ par la relation suivante

$$S(t,x) = \frac{1}{(T-t)^{1/2}} e^{-\frac{i}{(t-T)} + i\frac{x^2}{4(t-T)}} Q\left(\frac{x}{t-T}\right).$$

a) Démontrer que S est une solution de (N) sur $[0,T[$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $S(t,x)$ admet-elle une limite finie quand t tend vers T?

5) Démontrer qu'il existe $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que (N) n'admette pas de solution sur $\mathbb{R}$ ayant u_0 pour donnée initiale.

6) a) Pour $T > 0$ et $\lambda > 0$, démontrer que si $u(t,x)$ est une solution de (N) sur $[0,T]$, alors $\lambda^{\frac{1}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est une solution de (N) sur $[0, \frac{T}{\lambda^2}]$.

b) On dira que la solution $P(t,x)$ est *stable dans* L^2 si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tel que $\int_{\mathbb{R}} |P(0,x) - u_0(x)|^2 dx \leq \delta$, alors il existe une solution de (N) sur $\mathbb{R}$, $u(t,x)$ de donnée initiale u_0, telle que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} |P(t,x) - u(t,x)|^2 dx \leq \epsilon.$$

Démontrer que la solution $P(t,x)$ n'est pas stable dans L^2.