composition d'analyse

Durée : 6 heures

NOTATIONS ET OBJECTIFS

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. La lettre n désigne toujours un entier ≥ 1.

On considère des problèmes du type suivant :

$$\begin{cases} F(t, x, u, \partial_t u, \partial_x u) = 0\,, \\ u(0, x) = f(x)\,, \end{cases}$$

appelés *problèmes de Cauchy*. Dans ce problème, les fonctions F et f sont données, et la fonction u est l'inconnue. Les lettres t et x représentent respectivement des variables appartenant à $\mathbb{R}$ et à $\mathbb{R}^n$ (parfois à $\mathbb{C}$ et à $\mathbb{C}^n$), en écrivant $x = (x_1, \ldots, x_n)$. La dérivée partielle de la fonction u par rapport à t est notée $\partial_t u$ et la dérivée partielle par rapport à x_j est notée $\partial_j u$; la notation $\partial_x u$ désigne le vecteur $(\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$. Comme on cherche des solutions u à valeurs complexes, on suppose que la fonction F est analytique de ses arguments. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$), on dit que u est solution du problème ci-dessus *dans* Ω si

$$F\big(t, x, u(t,x), \partial_t u(t,x), \partial_x u(t,x)\big) = 0$$

pour tout $(t, x) \in \Omega$ et si $u(0, x) = f(x)$ pour tout x tel que $(0, x) \in \Omega$.

Dans la partie III, on établit un résultat d'existence pour le problème de Cauchy, dans la partie IV un résultat d'approximation des solutions, et dans la partie V un résultat d'unicité. Les deux premières parties servent de préparation aux parties suivantes.

Les parties II et III forment un tout indépendant de la partie I. De même, si on admet le résultat de la question 16°) (de la partie III), la partie IV est indépendante de tout ce qui la précède. En revanche, il sera utile d'avoir traité les quatre premières parties pour aborder la cinquième.

PARTIE I. – CHAMP DE VECTEURS TANGENT À UN FERMÉ

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne habituelle, en notant $\langle x, y\rangle$ et $|x|$ respectivement le produit scalaire des vecteurs x et y et la norme euclidienne du vecteur x.

Dans toute cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F un fermé de Ω et v un champ de vecteurs dans Ω, c'est-à-dire une application $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que l'on suppose de classe C^1.

Tout point $y \in F$ tel que $|x - y| = \inf_{z\in F} |x - z|$ est appelé *une projection de x sur F*. D'autre part, on convient d'appeler *courbe intégrale de v* toute application $x : I \to \Omega$ de classe C^1 vérifiant $x'(t) = v(x(t))$ pour tout $t \in I$, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On notera qu'une telle courbe intégrale n'est pas toujours une courbe au sens géométrique du terme : par exemple, l'application constante $x(t) = x^0$ est une courbe intégrale de v pourvu que $v(x^0) = 0$. On dit aussi que la courbe intégrale $x : I \to \Omega$ *passe par le point* $x^0 \in \Omega$ si $x^0 \in x(I)$. Enfin, on dit que le champ de vecteurs v est *tangent à F* s'il vérifie la propriété : $\langle v(x^0), c - x^0\rangle = 0$ pour tous $x^0 \in F$ et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que la boule ouverte de centre c et de rayon $|x^0 - c|$ ne contient aucun point de F. On pourra remarquer que v est tangent à F si et seulement si $-v$ est tangent à F.

1°) Énoncer avec toutes ses hypothèses un théorème classique permettant de montrer que par tout point de Ω passe une courbe intégrale de v. On expliquera soigneusement pourquoi les hypothèses de ce théorème sont ici vérifiées, mais *on ne proposera pas de démonstration de ce théorème.*

2°) Montrer que pour tout point $x^0 \in F$, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que la boule compacte K de centre x^0 et de rayon $2\,\delta$ soit contenue dans Ω et vérifie : tout point x situé dans la boule ouverte de centre x^0 et de rayon δ possède une projection sur F qui est aussi dans K.

3°) Soit $x : I \to \Omega$ une courbe intégrale de v. On suppose que pour tout $t \in I$, $x(t)$ possède une projection $y(t)$ sur F, et on pose $f(t) = |x(t) - y(t)|^2$. Montrer que

$$f(s) - f(t) \leq \langle x(s) - x(t), x(s) + x(t) - 2\,y(t)\rangle$$

pour tous s et $t \in I$, puis en déduire que

$$\limsup_{\substack{s\to t \\ s>t}} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq 2\,\langle v(x(t)), x(t) - y(t)\rangle \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

4°) Soient $T > 0$ et $g : [0, T[\to [0, +\infty[$ une fonction continue vérifiant $g(0) = 0$ et

$$\limsup_{\substack{s \to t \\ s > t}} \frac{g(s) - g(t)}{s - t} \leq 0$$

pour tout $t \in [0, T[$.
(a) Pour $\varepsilon > 0$, on note $I_\varepsilon = \{ t \in]0, T[\,;\, g(s) \leq \varepsilon\, s \text{ pour tout } s \leq t \}$. Montrer que I_ε est un ouvert non vide de $]0, T[$.
(b) Montrer que la fonction g est identiquement nulle sur $[0, T[$.

5°) On suppose maintenant que le champ de vecteurs v est tangent à F. Soit $x : I \to \Omega$ une courbe intégrale de v.
(a) Montrer que sous les hypothèses de la question 3°), on a $\langle v(y(t)), x(t) - y(t) \rangle = 0$, puis en déduire que la fonction $f(t) = |x(t) - y(t)|^2$ vérifie

$$\limsup_{\substack{s \to t \\ s > t}} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq C_K\, f(t)$$

lorsque $x(t)$ et $y(t)$ restent dans un convexe compact $K \subset \Omega$ pour une constante C_K dépendant de K.
(b) Montrer que si $0 \in I$ et $x(0) \in F$, alors il existe un nombre strictement positif $T \in I$ tel que $x(t) \in F$ pour tout $t \in [0, T[$ (on pourra introduire la fonction $g(t) = e^{-Ct} f(t)$, où C est une constante à choisir convenablement).
(c) Montrer l'alternative suivante : ou bien $x(I)$ est contenue dans F, ou bien $x(I)$ ne contient aucun point de F.

PARTIE II. – FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans cette partie, on utilise les notations suivantes.
Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \qquad \text{et} \qquad \alpha! = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j!)\,.$$

Si de plus $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, on écrit $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout j, puis on note

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha - \beta)!} \text{ si } 0 \leq \beta \leq \alpha\,, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = 0 \text{ sinon}.$$

De plus, si $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$.

Si (u) est une suite de nombres complexes u_α où l'indice α décrit $\mathbb{N}^n$, on dit que la série de terme général u_α est *absolument convergente* si la série de terme général $v_N = \sum_{|\alpha| = N} |u_\alpha|$ est convergente, et on note alors

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha = \sum_{N=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{|\alpha| = N} u_\alpha \Bigr)\,.$$

De plus, si u_α dépend d'un paramètre x, on dit que la convergence de la série de terme général $u_\alpha(x)$ est *uniforme* si celle de la série de terme général $v_N(x) = \sum_{|\alpha| = N} |u_\alpha(x)|$ est uniforme.

Pour une suite quelconque (u) de nombres complexes u_α indicés par $\mathbb{N}^n$, on définit

$$\|(u)\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Bigl(\frac{|u_\alpha|\,(1 + |\alpha|)^2}{|\alpha|!} \Bigr)\,,$$

cette borne supérieure étant finie ou infinie, puis on considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{B}$, des telles suites (u) pour lesquelles $\|(u)\|$ est finie.

6°) Démontrer que l'application $(u) \mapsto \|(u)\|$ est une norme sur $\mathbb{B}$, et que $\mathbb{B}$ muni de cette norme est un espace de Banach.

7°) Soit $N \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrer que $$\sum_{b=0}^{N} \frac{(1 + N)^2}{(1 + b)^2\,(1 + N - b)^2} \leq 16$$

(on pourra distinguer $b \leq N/2$ et $b > N/2$).

(b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\displaystyle\sum_{|\alpha|=N} \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^N}{N!}$.

(c) Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\displaystyle\sum_{|\beta|=N} \binom{\alpha}{\beta} = \binom{|\alpha|}{N}$

(on pourra procéder par récurrence sur $|\alpha|$).

8°) Montrer que si $(u) \in \mathbb{B}$, alors la série

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

est absolument convergente pour tout x appartenant au domaine

$$\Delta = \{ x \in \mathbb{C}^n \,;\, |x_1| + \ldots + |x_n| < 1 \}.$$

Montrer que cette convergence est uniforme sur Δ, et établir la majoration

$$|u(x)| \leq 2\,\|(u)\| \qquad \text{pour tout } x \in \Delta.$$

9°) Étant données deux suites (u) et (v), on définit une suite $(u) \times (v) = (w)$ par la formule

$$w_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \binom{\alpha}{\beta} u_\beta \, v_{\alpha-\beta}.$$

Montrer que si (u) et $(v) \in \mathbb{B}$, alors $(u) \times (v) \in \mathbb{B}$ avec la majoration

$$\|(u) \times (v)\| \leq 16\,\|(u)\|\,\|(v)\|,$$

et que les fonctions u, v et w associées aux suites comme à la question précédente vérifient $w(x) = u(x)\,v(x)$ pour tout $x \in \Delta$.

10°) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note δ^j l'élément de $\mathbb{N}^n$ dont les composantes sont $\delta^j_k = 0$ si $k \neq j$ et $\delta^j_j = 1$. Étant donnée une suite (u), on définit deux suites $\partial_j^{-1}(u) = (v)$ et $\partial_j(u) = (w)$ par les formules

$$v_\alpha = 0 \ \text{ si } \alpha_j = 0, \qquad v_\alpha = u_{\alpha-\delta^j} \ \text{ si } \alpha_j > 0 \qquad \text{et} \qquad w_\alpha = u_{\alpha+\delta^j}.$$

Montrer que si $(u) \in \mathbb{B}$, alors $\partial_j^{-1}(u) \in \mathbb{B}$ et $\partial_k \partial_j^{-1}(u) \in \mathbb{B}$ avec les majorations

$$\|\partial_j^{-1}(u)\| \leq 4\,\|(u)\| \qquad \text{et} \qquad \|\partial_k \partial_j^{-1}(u)\| \leq \|(u)\|.$$

11°) Soient $x^0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $x_j^0 \neq 0$ pour tout j, et

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

une série absolument convergente en $x = x^0$.

(a) Montrer que cette série est uniformément convergente dans $\Omega = \{ x \in \mathbb{C}^n \,;\, |x_j| < |x_j^0| \text{ pour } j = 1, \ldots, n \}$. Un tel ouvert Ω est appelé *polydisque de* $\mathbb{C}^n$.

(b) On pose $(v) = \partial_j^{-1}(u)$ et $(w) = \partial_j(u)$. Montrer que les séries

$$v(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} v_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} \qquad \text{et} \qquad w(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} w_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

sont absolument convergentes en tout point $x \in \Omega$, et que

$$v(x) = x_j \int_0^1 u(x_1, \ldots, s\,x_j, \ldots, x_n)\, ds \qquad \text{et}$$

$$w(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{u(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h}.$$

Ces fonctions $v(x)$ et $w(x)$ sont notées respectivement $\partial_j^{-1}u(x)$ et $\partial_j u(x)$, et cette dernière est appelée *dérivée partielle de u par rapport à la variable* x_j.
(c) Par itération des opérations ∂_j, on définit $\partial^\alpha u(x) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ fixé. Montrer que l'on a $u_\alpha = \partial^\alpha u(0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et en déduire que la suite (u) est déterminée par la restriction de la fonction u à un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$.

Une fonction u définie dans un voisinage de $x^0 \in \mathbb{C}^n$ est dite analytique en x^0 *s'il existe une suite (u) de nombres complexes telle que*

$$u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} u_\alpha \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!}$$

avec convergence absolue de cette série en tout point x d'un voisinage de x^0 dans $\mathbb{C}^n$. Si u est une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'elle est analytique dans Ω si elle est analytique en chaque point de Ω, et on admettra le résultat suivant : une fonction u est analytique sur un polydisque si et seulement si la série ci-dessus pour $x^0 = 0$ est absolument convergente en tout point de ce polydisque.

Grâce au résultat de la question 11°)(c), *on peut considérer $\mathbb{B}$ comme un sous-espace de l'espace des fonctions analytiques dans Δ. Ainsi, si u est une fonction définie dans Δ, on écrit $u \in \mathbb{B}$ pour signifier que u est analytique dans Δ et que la suite (u) de ses coefficients $u_\alpha = \partial^\alpha u(0)$ appartient à $\mathbb{B}$. De plus, pour une telle fonction u, on note aussi $\|u\|$ la norme de la suite (u).*

12°) On démontre maintenant une réciproque de la question 8°).
(a) On suppose que $u(x)$ est une fonction analytique dans le polydisque

$$\Omega = \{\, x \in \mathbb{C}^n \,;\, \max_j |x_j| < 2 \,\}.$$

Montrer que $u \in \mathbb{B}$.
(b) Plus généralement, si $F(X)$ est une fonction analytique dans le polydisque

$$\Omega = \{\, X \in \mathbb{C}^N \,;\, \max_k |X_k| < 2 \,\},$$

et si $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{B}$ avec $\|u_k\| \leq 1/16$ pour tout k, montrer que la fonction composée $f(x) = F\big(u_1(x), \ldots, u_N(x)\big)$ vérifie $f \in \mathbb{B}$ (on pourra étudier la convergence dans $\mathbb{B}$ de la série de terme général $F_\alpha\, u_1^{\alpha_1} \ldots u_N^{\alpha_N}/\alpha!$).
(c) On conserve les hypothèses et les notations du (b). Soient de plus $v_1, \ldots, v_N$ des fonctions de $\mathbb{B}$ telles que $\|v_k\| \leq 1/16$ pour tout k, et soit la fonction composée $g(x) = F\big(v_1(x), \ldots, v_N(x)\big)$. Montrer qu'il existe une constante C indépendante des u_k et des v_k (pourvu que ceux-ci restent de norme $\leq 1/16$) telle que

$$\|g - f\| \leq C \max_{1\leq k\leq N} \|v_k - u_k\|.$$

PARTIE III. – RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY

Dans cette partie, on se donne deux fonctions f et F analytiques respectivement près du point $0 \in \mathbb{C}^n$, et près du point $(0,0,y^0,z^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, où $y^0 = f(0)$ et $z^0 = \partial_x f(0)$. On cherche alors un voisinage Ω de $(0,0)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et une fonction $u(t,x)$ analytique dans Ω et solution dans Ω du problème de Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u = F(t,x,u,\partial_x u)\,, \\ u(0,x) = f(x)\,. \end{cases}$$

13°) On pose $F^0 = F(0,0,y^0,z^0)$, et on note $\partial_t^{-1} v(t,x) = t\int_0^1 v(s\,t,x)\,ds$ comme à la question 11°).
(a) Montrer que si $v(t,x)$ et $f(x)$ sont analytiques dans un polydisque Ω_1 de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, alors le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = F^0 + v(t,x)\,, \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

possède une unique solution u analytique dans Ω_1, et exprimer cette solution u en fonction de f, F^0 et $\partial_t^{-1} v$.
(b) En déduire une fonction $G_1(t,x,y,z)$ analytique dans un voisinage de $(0,0,0,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, vérifiant $G_1(0,0,0,0) = 0$, et telle que, si le polydisque Ω_1 est assez petit, la relation $v(t,x) = \partial_t u(t,x) - F^0$ définit une bijection entre les solutions u du problème (1) dans Ω_1, et les solutions v de l'équation

$$(2) \qquad v = G_1(t,x,\partial_t^{-1} v, \partial_x \partial_t^{-1} v)$$

dans Ω_1.

14°) Pour $\varepsilon > 0$, on pose maintenant $w(t,x) = v(\varepsilon^2 t, \varepsilon x)$. Décrire à l'aide de Ω_1, G_1 et ε un polydisque Ω_ε et une fonction $G_\varepsilon(t,x,y,z)$ analytique tels que v est solution de l'équation (2) dans Ω_1 si et seulement si w est solution de l'équation

$$(3) \qquad w = G_\varepsilon(t,x,\partial_t^{-1} w, \partial_x \partial_t^{-1} w)$$

dans Ω_ε.

15°) On considère l'espace de Banach $\mathbb{B}$ défini comme dans la partie II, mais pour des fonctions des $n+1$ variables (t,x), et on note toujours $\|w\|$ la norme de w dans cet espace. Pour toute fonction $w \in \mathbb{B}$, on note $\Phi_\varepsilon(w) = g$ la fonction analytique définie par

$$g(t,x) = G_\varepsilon\big(t,x,\partial_t^{-1} w(t,x), \partial_x \partial_t^{-1} w(t,x)\big)\,.$$

Montrer que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\Phi_\varepsilon(w) \in \mathbb{B}$ dès que $\|w\| \le 1$, et que $\|\Phi_\varepsilon(w^2) - \Phi_\varepsilon(w^1)\| \le \|w^2 - w^1\|/2$ dès que $\|w^1\| \le 1$ et $\|w^2\| \le 1$.

16°) Montrer que si Ω est un polydisque de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ assez petit, le problème (1) possède une unique solution analytique dans Ω.

PARTIE IV. – APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME

Soit N un entier ≥ 1. Dans cette partie, on utilise les lettres t et θ pour noter des variables parcourant $\mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ pour des variables parcourant $\mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \ldots, y_N)$ et $z = (z_{1,1}, \ldots, z_{n,N})$ pour des variables parcourant respectivement $\mathbb{C}^N$ et $\mathbb{C}^{nN}$. L'indice j désigne toujours un entier entre 1 et n, tandis que l'indice k désigne un entier entre 1 et N : ainsi les composantes de x, ξ, y et z sont notées respectivement x_j, ξ_j, y_k et $z_{j,k}$. Les dérivations partielles par rapport à t et à x_j sont notées respectivement ∂_t et ∂_j.

On note $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$ une fonction de classe C^2 (et non plus analytique) définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, et on note $\partial_x u(t,x) = (\partial_j u_k(t,x))$ ses dérivées partielles par rapport aux variables x_j. On suppose que $u = (u_1, \ldots, u_N)$ est solution, dans un voisinage de $(0,0)$, du système d'équations aux dérivées partielles

$$(4) \qquad \partial_t u_k = \sum_{j=1}^{n} F_j(t,x,u)\, \partial_j u_k + G_k(t,x,u), \qquad 1 \leq k \leq N,$$

où les $F_j(t,x,y)$ et les $G_k(t,x,y)$ sont des fonctions données analytiques près de $(0,0,y^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N$, avec $y^0 = u(0,0) \in \mathbb{C}^N$ (on utilise aussi la notation $z^0 = \partial_x u(0,0) \in \mathbb{C}^{nN}$). Les fonctions analytiques de plusieurs variables ont été introduites et étudiées dans la partie II, mais en réalité on n'aura besoin ici que des propriétés suivantes, qui pourront être admises :

- Les composées de fonctions analytiques sont encore des fonctions analytiques.
- Si $H(t,x,y,z)$ est analytique et si $u(t,x)$ est de classe C^2, on note H^u la fonction composée
$$H^u(t,x) = H\big(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\big)$$
qui est alors de classe C^1, et on a
$$\partial_j(H^u)(t,x) = (\partial_j H)^u(t,x) + \sum_{k=1}^{N} (\partial_{(k)} H)^u(t,x)\, \partial_j u_k(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} (\partial_{(i,k)} H)^u(t,x)\, \partial_i \partial_j u_k(t,x)$$
où les fonctions $\partial_{(k)} H(t,x,y,z)$ (la dérivée partielle de H par rapport à y_k) et $\partial_{(i,k)} H(t,x,y,z)$ (la dérivée partielle de H par rapport à $z_{i,k}$) sont encore analytiques. La formule ci-dessus exprimant $\partial_j(H^u)$ reste valable pour $\partial_t(H^u)$ à condition de remplacer partout ∂_j par ∂_t.
- La fonction $H(y) = \exp\big(-\frac{y_1^2+\ldots+y_N^2}{2}\big)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}^N$, et cette fonction vérifie
$$\int_{\mathbb{R}^N} H(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} H(y_1, \ldots, y_N)\, dy_1 \ldots dy_N = (2\pi)^{N/2}.$$
- Le résultat démontré à la question 16°).

17°) Montrer qu'il existe des fonctions $g(t,x,y,z)$, $a_j(t,x,y,z)$, $b_k(t,x,y,z)$ et $c_{j,k}(t,x,y,z)$ analytiques près de $(0,0,y^0,z^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{nN}$ ne dépendant que des fonctions F_j et G_k et possédant la propriété suivante : pour toute fonction $H(t,x,y,z)$ analytique et toute fonction $u = (u_1, \ldots, u_N)$ de classe C^2 solution du système (4), on a

$$\partial_t(H^u) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(F_j^u H^u) = (\mathscr{D}H + g\, H)^u$$

où on a posé

$$\mathscr{D}H = \partial_t H + \sum_{j=1}^{n} a_j\, \partial_j H + \sum_{k=1}^{N} b_k\, \partial_{(k)} H + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} c_{j,k}\, \partial_{(j,k)} H.$$

18°) En conservant l'opérateur $\mathscr{D}$ et la fonction g trouvés à la question précédente (qui sont indépendants de la nouvelle variable $\theta \in \mathbb{R}$), montrer qu'il existe des fonctions $X_j(\theta,t,x,y,z)$ et $Y_k(\theta,t,x,y,z)$ analytiques près de $(0,0,0,y^0,z^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{nN}$ vérifiant

$$\begin{cases} \mathscr{D}X_j = \mathscr{D}Y_k + g\, Y_k = 0 & \text{près de } (0,0,0,y^0,z^0), \quad 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq N, \\ X_j(\theta,\theta,x,y,z) = x_j & \text{pour } (\theta,x,y,z) \text{ près de } (0,0,y^0,z^0), \quad 1 \leq j \leq n, \\ Y_k(\theta,\theta,x,y,z) = y_k & \text{pour } (\theta,x,y,z) \text{ près de } (0,0,y^0,z^0), \quad 1 \leq k \leq N \end{cases}$$

(on pourra utiliser le changement de variables analytique $(\Theta, T) = (\theta + t, \theta - t)$).

Dans les questions qui suivent, on notera T un réel strictement positif et Ω un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ tels que le point $(\theta,t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x))$ soit situé dans le domaine où la construction ci-dessus est valable pour tout $(\theta,t,x) \in\,]-T,T[\, \times\,]-T,T[\, \times\, \Omega$.

19°) On rappelle que pour tout voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on peut trouver une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ valant 1 près de 0 et s'annulant en dehors d'un compact contenu dans Ω. On note φ une telle fonction.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $H_{\theta,\xi,\varepsilon}$ la fonction de (t,x,y,z) à valeurs dans $\mathbb{C}^N$ dont la composante d'indice k vaut

$$(2\pi)^{-n/2}\,\varepsilon^{-n}\,Y_k(\theta,t,x,y,z)\,\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n(\xi_j - X_j(\theta,t,x,y,z))^2}{2\varepsilon^2}\right),$$

puis, $u = (u_1,\ldots,u_N)$ étant une solution de classe C^2 du système (4), on pose

$$I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} H^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(t,x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Montrer que pour $\theta \in \,]-T,T[$ et ξ suffisamment proche de 0, on a

$$u(\theta,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(\theta)\,.$$

20°) On note $\Phi = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,;\, \partial_x\varphi(x) \neq 0 \,\}$.

(a) Montrer que

$$I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(\theta) - I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(0) = \int_{[0,\theta]\times\Phi} \psi(t,x)\,dt\,dx$$

pour une fonction $\psi(t,x)$ que l'on exprimera à l'aide des quantités précédentes.

(b) Montrer qu'il existe un voisinage ω de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et un nombre $\delta > 0$ tels que si $(\theta,\xi) \in \omega$, $|t| \le |\theta|$ et $x \in \overline{\Phi}$, on a

$$\mathcal{R}e \sum_{j=1}^n \Big(\xi_j - X_j\big(\theta,t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\big)\Big)^2 \ge 2\delta\,,$$

et en déduire la majoration

$$|I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(\theta) - I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(0)| \le C\,\varepsilon^{-n}\,e^{-\delta/\varepsilon^2}$$

où la constante C dépend de u, mais pas de ε.

(c) Montrer que pour $(\theta,\xi) \in \omega$,

$$u(\theta,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} I^u_{\theta,\xi,\varepsilon}(0)\,.$$

21°) Soit $\widetilde{u}(t,x) = (\widetilde{u}_1(t,x),\ldots,\widetilde{u}_N(t,x))$ une solution de classe C^2 du système (4) prenant les mêmes valeurs que u sur $t = 0$, c'est-à-dire que l'on a $\widetilde{u}_k(0,x) = u_k(0,x)$ pour tout $k = 1,\ldots,N$. Montrer qu'il existe un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ dans lequel on a $\widetilde{u} = u$, c'est-à-dire qu'il y a unicité (localement) de la solution du problème de Cauchy associé au système (4).

PARTIE V. – UNICITÉ POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY

Dans cette dernière partie, les lettres t, θ, x et ξ sont utilisées de la même façon que dans la partie précédente, y et η désignent des variables parcourant $\mathbb{C}$, et $z = (z_0, z_*)$ et $\zeta = (\zeta_0,\zeta_*)$ des variables parcourant $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, en posant

$$z_* = (z_1,\ldots,z_n) \qquad \text{et} \qquad \zeta_* = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\,.$$

On admettra le théorème des fonctions implicites analytiques qui peut se démontrer à l'aide des méthodes de la partie III, et qui s'énonce de la façon suivante : *Soit f une fonction analytique près de $(z_0^0, z_*^0) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. On note $\partial_{(0)}f$ sa dérivée partielle par rapport à z_0, et on suppose que $f(z_0^0,z_*^0) = 0$ et que $\partial_{(0)}f(z_0^0,z_*^0) \neq 0$. Alors il existe une fonction $g(z_*)$ analytique près de z_*^0 telle que pour (z_0,z_*) proche de (z_0^0,z_*^0) on ait : $f(z_0,z_*) = 0$ si et seulement si $z_0 = g(z_*)$.*

Etant donnée une fonction $F(t,x,y,z)$ analytique près de $(0,0,y^0,z^0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ et s'annulant en ce point, on considère les solutions $u(t,x)$ de classe C^3 dans un voisinage Ω de $(0,0)$ de l'équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$, vérifiant $u(0,0) = y^0$ et $(\partial_t u(0,0), \partial_x u(0,0)) = (z_0^0, z_*^0) = z^0$.

À chacune de ces solutions $u(t,x)$, on associe les objets géométriques définis de la façon suivante.

On note $v^u(t,x)$ et $w^u(t,x)$ respectivement les parties réelle et imaginaire de la fonction composée $(\partial_z F)^u(t,x)$, où $\partial_z F(t,x,y,z)$ est la fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^{n+1}$ dont les composantes sont les dérivées partielles de F par rapport aux variables z_j. Autrement dit, on pose $\partial_z F = (\partial_{(0)}F, \partial_{(1)}F, \dots, \partial_{(n)}F)$ en notant $\partial_{(j)}F$ la dérivée partielle de F par rapport à z_j, puis

$$v^u(t,x) + i\,w^u(t,x) = \partial_z F(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)).$$

Les fonctions v^u et w^u sont définies dans Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$, si bien que ce sont des champs de vecteurs (de classe C^2) auxquels on pourra appliquer les résultats de la partie I.

On note alors $\mathscr{C}^u$ la partie de Ω formée des points qui peuvent être reliés à $(0,0)$ par un nombre fini d'arcs de courbes intégrales des champs v^u et w^u. Plus précisément, on dit que $m \in \mathscr{C}^u$ si on peut trouver dans Ω des points $m^0 = (0,0), m^1, \dots, m^{N-1}, m^N = m$ tels que pour tout $k = 1, \dots, N$, les points m^{k-1} et m^k soient situés sur une même courbe intégrale de v^u ou de w^u.

Le but des questions qui suivent est de décrire à l'aide de $\mathscr{C}^u$ des conditions suffisantes d'unicité de la solution de l'équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$.

22°) On suppose que $F(t,x,y,z) = z_0 - G(t,x,y,z_*)$, c'est-à-dire que l'équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$ s'écrit aussi $\partial_t u = G(t,x,u,\partial_x u)$ pour une fonction G analytique près de $(0,0,y^0,z_*^0)$. Montrer que si u est une solution de classe C^3 de l'équation $\partial_t u = G(t,x,u,\partial_x u)$, alors $\mathscr{U} = (u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u)$ est une solution de classe C^2 d'un système du type étudié dans la partie IV, puis en déduire que deux solutions de classe C^3 de l'équation $\partial_t u = G(t,x,u,\partial_x u)$ qui prennent les mêmes valeurs sur $t = 0$ sont nécessairement égales dans tout un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

23°) Soient $m^1 = (t^1,x^1) \in \Omega$ et $(y^1,z^1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $F(t^1,x^1,y^1,z^1) = 0$. On note $v^1 + i w^1 = \partial_z F(t^1,x^1,y^1,z^1)$, et avec les notations de la partie I, on suppose que $\langle v^1, c - m^1\rangle \neq 0$ ou que $\langle w^1, c - m^1\rangle \neq 0$ pour un point $c \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un changement de variables $f : (\theta,\xi) \mapsto (t,x) = f(\theta,\xi)$ analytique près de $(0,0)$ et d'inverse analytique, vérifiant $f(0,0) = m^1$, et une fonction $G(\theta,\xi,\eta,\zeta_*)$ analytique, tels que :
(a) Pour (θ,ξ) proche de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on ait $m = (t,x) = f(\theta,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $|m - c| = |m^1 - c|$ si et seulement si $\theta = 0$.
(b) Une fonction u de classe C^3 vérifiant $\big(u(m^1), \partial_t u(m^1), \partial_x u(m^1)\big) = (y^1, z^1)$ est solution de l'équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$ près de m^1 si et seulement si la fonction $\omega(\theta,\xi) = u \circ f(\theta,\xi)$ est solution de l'équation $\partial_\theta \omega = G(\theta,\xi,\omega,\partial_\xi \omega)$ près de $(0,0)$.

24°) Soient u et $\widetilde{u}$ deux solutions de classe C^3 dans Ω de la même équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$. En désignant par S l'adhérence dans Ω de l'ensemble $\{\,(t,x) \in \Omega\,;\ \widetilde{u}(t,x) \neq u(t,x)\,\}$, montrer que les champs de vecteurs v^u et w^u sont tangents à S au sens de la définition donnée dans la partie I.

25°) Soient u et $\widetilde{u}$ deux solutions de classe C^3 dans Ω de la même équation $F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u) = 0$. On note $\Omega^- = \{\,(t,x) \in \Omega\,;\ t < 0\,\}$, $\Sigma = \{\,(t,x) \in \Omega\,;\ t = 0\,\}$ et $\Omega^+ = \{\,(t,x) \in \Omega\,;\ t > 0\,\}$.
(a) On suppose que $\widetilde{u} = u$ dans Ω^- et que $\mathscr{C}^u$ contient au moins un point de Ω^-. Montrer que $\widetilde{u} = u$ dans tout un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
(b) On suppose maintenant que $\widetilde{u} = u$ et $\partial_t \widetilde{u} = \partial_t u$ sur Σ, que l'ensemble des points de Σ où $(\partial_{(0)}F)^u \neq 0$ est dense dans Σ et que $\mathscr{C}^u$ contient au moins un point de Ω^+ et au moins un point de Ω^-. Montrer que $\widetilde{u} = u$ dans tout un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.