NOTATIONS et DÉFINITIONS.

Soit d un entier positif.

On désigne par Λ le sous–groupe additif $(2\pi\mathbf{Z})^d$ de $\mathbf{R}^d$. Une application f définie sur $\mathbf{R}^d$ est dite Λ–périodique si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on a $f(x+\lambda) = f(x)$.

Si E est un $\mathbf{R}$–espace vectoriel de dimension finie, on note $C^\infty(\mathbf{R}^d, E)$ l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbf{R}^d$ dans E, et $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, E)$ le sous–espace de $C^\infty(\mathbf{R}^d, E)$ constitué des applications Λ–périodiques.

L'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels à d lignes et d colonnes est noté $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, et I désigne la matrice identité. Si $A \in C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ et i, j sont deux entiers compris entre 1 et d, A_{ij} désigne l'élément de $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ défini par le coefficient de A en ligne i et en colonne j.

Si N est un entier positif, on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^N$. Etant donné deux applications V, W de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^N$, on note $\langle V, W\rangle$ la fonction sur $\mathbf{R}^d$ définie par

$$\langle V, W\rangle(x) = \langle V(x), W(x)\rangle.$$

Si $P \in C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$, on note $\Gamma(P)$ l'élément de $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ défini par

$$\Gamma(P)_{ij} = \langle \frac{\partial P}{\partial x_i}, \frac{\partial P}{\partial x_j} \rangle,\ 1 \le i, j \le d.$$

Une *métrique de dimension d* est une application $G \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $G(x)$ soit une matrice symétrique définie positive. On dit que G est *représentable en dimension* N s'il existe une application $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ telle que $G = \Gamma(P)$.
Le but de ce problème est de démontrer que toute métrique de dimension d est représentable en dimension assez grande (théorème de Nash, 1956).

Les parties **I, II, III, IV** sont indépendantes, à l'exception de la première question de la partie **IV** qui utilise la deuxième question de la partie **III**. La partie **V** utilise les parties **II, III** et **IV**.

PARTIE I. UN FAIT GÉNÉRAL ET DEUX CAS PARTICULIERS.

1. Soit $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$. Montrer que $\Gamma(P)$ est une métrique de dimension d si et seulement si la différentielle de P est injective en tout point de $\mathbf{R}^d$.

En déduire que, si $\Gamma(P)$ est une métrique de dimension d, alors $N > d$ (on pourra raisonner par l'absurde, en étudiant l'annulation de la différentielle de l'une des composantes de P).

2. Soit $g \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une métrique de dimension 1, c'est-à-dire $g(x) > 0$ en tout point x. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ et une fonction $a \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tels que l'application $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$P(x) = \left(M\cos\left(\frac{1}{M}\int_0^x a(y)\,dy\right), M\sin\left(\frac{1}{M}\int_0^x a(y)\,dy\right)\right)$$

soit 2π–périodique et vérifie $\Gamma(P) = g$.

3. Soit G la métrique de dimension 2 définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^2, G(x) = I\,.$$

a) Montrer que G est représentable en dimension 4.

On se propose de démontrer par l'absurde que G n'est pas représentable en dimension 3. Soit $P \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ telle que $\Gamma(P) = G$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, on considère le produit vectoriel

$$N(x) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial P}{\partial x_2}(x).$$

b) Montrer qu'il existe des fonctions b, a_1, a_2 de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = bN, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = a_1 N, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = a_2 N\,.$$

Exprimer alors $\dfrac{\partial N}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x_2}$ à l'aide de a_1, a_2, b et des dérivées premières de P.

c) En calculant de deux manières $\dfrac{\partial^3 P}{\partial x_1^2 \partial x_2}$, montrer que

$$a_1 a_2 = b^2\,.$$

d) On suppose de plus que P est Λ–périodique.
Montrer que la fonction $x \mapsto \langle P(x), P(x) \rangle$ atteint son maximum en un point y, et qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $P(y) = \lambda N(y)$. Que peut–on dire de la matrice

$$A = \lambda \begin{pmatrix} a_1(y) & b(y) \\ b(y) & a_2(y) \end{pmatrix} ?$$

Conclusion ?

PARTIE II. UNE VARIANTE DU THÉORÈME DU POINT FIXE.

Soit E_0 un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, muni d'une norme N_0 qui le rend complet. Soit

$$\mathcal{B} : E_0 \times E_0 \to E_0$$

une application bilinéaire. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in E_0,\ \forall v \in E_0,\ \ N_0(\mathcal{B}(u, v)) \leq C\, N_0(u)\, N_0(v).$$

1. Montrer que, pour tout élément f de E_0 tel que $N_0(f) < \dfrac{1}{4C}$, il existe un élément u et un seul de E_0 tel que $N_0(u) < \dfrac{1}{2C}$ et

$$u = f + \mathcal{B}(u, u).$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on suppose donnés un sous–espace vectoriel E_k de E_0 et une norme N_k sur E_k ayant la propriété suivante :

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E_k et tout élément u de E_0 vérifiant

i) La suite $(N_k(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée,

ii) $N_0(u_n - u)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini,

on a $u \in E_k$.

On suppose en outre que, si $k \geq l \geq 0$, $E_k \subset E_l$ et $N_k \geq N_l$ sur E_k.

Enfin, on fait l'hypothèse qu'il existe une suite $(D_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs telle que, pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{B}(E_k \times E_k) \subset E_k$ et

$$\forall u \in E_k,\quad N_k(\mathcal{B}(u,u)) \leq C\, N_0(u)N_k(u) + D_k(N_{k-1}(u))^2.$$

2. Dans les conditions de la question 1, montrer que, s'il existe $k \geq 1$ tel que $f \in E_k$, alors $u \in E_k$.

PARTIE III. APPROXIMATION.

Dans cette partie, on montre que toute métrique de dimension d peut être approchée par une suite de métriques représentables.

On note $X = [-\pi, \pi]^d$ et $L = \mathbf{Z}^d$. On appelle *polynôme trigonométrique* toute fonction $p : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ telle qu'il existe une famille $(c_l)_{l\in L}$ de nombres complexes, nuls sauf pour un ensemble fini d'indices l, pour laquelle

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\quad p(x) = \sum_{l\in L} c_l e^{i\langle l, x\rangle}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

Pour tout entier positif m, J_m désigne l'intersection $\mathbf{Z} \cap [-m, m[$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : pour toute fonction continue F sur $X \times X$, on a

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^d \sum_{l\in J_m^d} F\left(x, \frac{l\pi}{m}\right) \to \int_X F(x,y)\,dy$$

quand m tend vers l'infini, uniformément par rapport à $x \in X$.

1. Montrer que, pour toute fonction continue Λ–périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$\int_X f(x-y)\,dy = \int_X f(y)\,dy$$

(on pourra raisonner par récurrence sur d).

2. Pour tout réel t et tout entier positif n, on pose

$$q_n(t) = (2 + \cos t)^n,\quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)\,dt$$

et on considère la suite p_n de fonctions de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$p_n(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{I_n^d}\, q_n(x_1)\ldots q_n(x_d).$$

a) Montrer que, pour tout réel $\delta \in]0,\pi[$, on a

$$\frac{1}{I_n}\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\,dt \to 1$$

quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que, pour toute fonction continue Λ–périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, la suite (f_n) de fonctions définie par

$$f_n(x) = \int_X p_n(y) f(x-y)\,dy$$

converge uniformément vers f.
En déduire que l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues Λ–périodiques pour la norme de la convergence uniforme.
c) Montrer de plus que, si f est de classe C^r, alors toute dérivée partielle de f_n d'ordre inférieur ou égal à r converge uniformément vers la dérivée partielle correspondante de f quand n tend vers l'infini.

Pour tout élément A de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1\le i,j\le d} |A_{ij}|.$$

On fixe un entier positif r et on note, pour toute application $M \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$,

$$\|M\|_r = \sup_{x\in\mathbf{R}^d}\left(\|M(x)\| + \sum_{\alpha=1}^{d}\left\|\frac{\partial^r M}{\partial x_\alpha^r}(x)\right\|\right)$$

3. Montrer que, pour toute métrique G de dimension d et tout $\varepsilon > 0$, il existe $D \in \mathbf{N}$, des éléments $y_1, \ldots, y_D$ de X, et des éléments $\mu_1, \ldots, \mu_D$ de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ à valeurs strictement positives, tels que

$$\|G - \sum_{j=1}^{D} \mu_j\, G(y_j)\|_r \le \varepsilon.$$

4. Si $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbf{R}^d$, on note $v \otimes v$ l'élément de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ défini par

$$(v\otimes v)_{ij} = v_i v_j \ ,\ 1 \le i,j \le d.$$

Montrer que, pour toute matrice A symétrique définie positive et tout $\varepsilon > 0$, il existe des réels strictement positifs $a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}$ et des éléments $l^{(1)}, \ldots, l^{(d)}$ de L tels que

$$\|A - \sum_{i=1}^{d} a^{(i)}\, l^{(i)} \otimes l^{(i)}\| \le \varepsilon$$

5. Soient $r_1, \ldots, r_q$ des éléments de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ et $l^{(1)}, \ldots, l^{(q)}$ des éléments de L. Pour tout entier positif n, on considère l'application

$$P_n : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^{2q} = (\mathbf{R}^2)^q$$
$$x \mapsto \left(\frac{r_k(x)}{n}\cos(n\langle l^{(k)}, x\rangle), \frac{r_k(x)}{n}\sin(n\langle l^{(k)}, x\rangle)\right)_{1\le k\le q}$$

Calculer $\Gamma(P_n)$.

6. Soient G une métrique de dimension d et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier positif N et $P \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ tels que

$$\|G - \Gamma(P)\|_r \le \varepsilon.$$

PARTIE IV. SÉRIES DE FOURIER À PLUSIEURS VARIABLES ET ESPACES DE SOBOLEV.

On rappelle les notations $X = [-\pi, \pi]^d$ et $L = \mathbf{Z}^d$ introduites à la partie III.

Pour tout $l = (l_1, \dots, l_d) \in L$, on note $[l] = \sum_{j=1}^{d} |l_j|$.

Pour tout entier positif N, on désigne par L_N l'ensemble des $l \in L$ tels que $[l] \leq N$. Enfin, pour toute fonction continue Λ-périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, on pose

$$\hat{f}(l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_X e^{-i\langle l,x\rangle} f(x)\, dx\,, \quad S_N f(x) = \sum_{l \in L_N} \hat{f}(l) e^{i\langle l,x\rangle},$$

$$\|f\|_0 = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_X |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

1. a) Que peut-on dire de la suite $(S_N p)_{N\in\mathbf{N}}$ si p est un polynôme trigonométrique ? Exprimer dans ce cas $\|p\|_0$ en fonction des coefficients $\hat{p}(l)$.

b) Dans le cas général où f est continue, exprimer $\|f - S_N f\|_0^2$ en fonction de $\|f\|_0^2$ et de $\|S_N f\|_0^2$.

c) Montrer que $\|f - S_N f\|_0$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (on pourra utiliser le résultat de la question III.2.b). Quelle est la limite quand N tend vers l'infini de la quantité

$$\sum_{l \in L_N} |\hat{f}(l)|^2 \ ?$$

Pour tout réel s tel que $2s > d$, on note H^s l'espace vectoriel des fonctions continues Λ-périodiques $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, telles que la quantité

$$\sum_{l \in L_N} (1 + [l])^{2s} |\hat{f}(l)|^2$$

admette une limite quand N tend vers l'infini. On note $\|f\|_s$ la racine carrée de cette limite. On définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel H^s.

2. a) Soit (f_n) une suite de H^s possédant les deux propriétés suivantes :

i) La suite $(\|f_n\|_s)$ est bornée.

ii) La suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

Montrer que f appartient à H^s et que $\|f\|_s \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_s$.

b) Montrer que, pour tout réel $\alpha > d$, pour tout réel $\beta \geq 1$, pour tout entier $N > 0$,

$$\sum_{l \in L_N} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} \leq \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha - d + 1)(\alpha - d)} \frac{1}{\beta^{\alpha - d}}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur d).

c) En déduire qu'il existe $K(s) > 0$ tel que, pour tout $f \in H^s$,

$$\forall N \in \mathbf{N}, \ \sum_{l \in L_N} |\hat{f}(l)| \leq K(s) \|f\|_s\,.$$

Montrer qu'alors $S_N f$ converge vers f uniformément, et

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} |f(x)| \leq K(s)\|f\|_s.$$

d) Montrer que l'espace vectoriel normé H^s est complet.

3. a) Montrer que, si $f \in H^{s+1}$, alors f est de classe C^1 et, pour tout $j \in \{1,...,d\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in H^s$ avec l'inégalité

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_s \leq \|f\|_{s+1}.$$

b) Soit r un entier supérieur à $d/2$. Montrer que, si f est une fonction Λ-périodique de classe C^r, alors $f \in H^r$ et

$$\|f\|_r^2 \leq C(r)\left(\|f\|_0^2 + \sum_{j=1}^d \left\|\frac{\partial^r f}{\partial x_j^r}\right\|_0^2\right)$$

où $C(r)$ ne dépend que de r et de d.

c) Déterminer l'intersection de tous les espaces H^s, $s > d/2$.

On définit sur l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^d$ une application linéaire Δ à valeurs dans les fonctions continues sur $\mathbf{R}^d$, par la formule

$$\Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

4. a) Montrer que, si $u \in H^{s+2}$, alors u est de classe C^2 , $u - \Delta u \in H^s$ et

$$\|u\|_{s+2} \leq (d+1)\|u-\Delta u\|_s \leq (d+1)\|u\|_{s+2}$$

(on pourra noter, pour $l \in L$, $\|l\| = (l_1^2 + ... + l_d^2)^{1/2}$).

b) Montrer que l'application $u \mapsto u - \Delta u$ est bijective de H^{s+2} sur H^s et de l'espace $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{C})$ sur lui-même.

5. Dans cette question et la suivante, on étudie le produit de deux éléments de H^s.

a) Soient $(c_l)_{l\in L}$ et $(d_l)_{l\in L}$ deux familles de nombres complexes, nuls sauf pour un ensemble fini d'indices l. Montrer l'inégalité

$$\sum_{l\in L}\left|\sum_{k\in L} c_{l-k}d_k\right|^2 \leq \left(\sum_{l\in L}|c_l|\right)^2 \sum_{k\in L}|d_k|^2$$

(appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit $\sqrt{|c_{l-k}|} \times \sqrt{|c_{l-k}|}|d_k|$).

b) Lorsque f et g sont des polynômes trigonométriques, calculer $\widehat{(fg)}(l)$ à l'aide des coefficients $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$, $k \in L$.

c) Montrer qu'il existe une constante $C(s)$ telle que, pour tous polynômes trigonométriques f, g, l'inégalité suivante soit vraie :

$$\|fg\|_s \leq C(s)\|f\|_s\|g\|_s \tag{1}$$

(on pourra écrire $\|fg\|_s^2$ comme une somme du type considéré en a), et majorer cette somme en distinguant les termes pour lesquels $[l-k] \leq [k]$ de ceux pour lesquels $[l-k] > [k]$).

d) Montrer que, si f et g sont des éléments de H^s, le produit fg appartient à H^s et qu'on a l'inégalité (1) ci–dessus.

6. Dans cette question, on se propose de raffiner l'inégalité (1).

a) Soit $m_0 > 0$. Montrer que, pour tout réel m, il existe un réel $D(m) \geq 0$ tel que, pour tous réels a, b vérifiant $0 \leq a \leq b$, on ait l'inégalité

$$(1+a+b)^m \leq 2^{m_0}(1+b)^m + D(m)(1+b)^{m-2}a^2$$

et qu'on peut choisir $D(m) = 0$ si $m \leq m_0$ (on pourra poser $a = t(1+b)$).

b) On fixe $s_0 > d/2$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ et, pour tout $s \geq s_0$, un réel $B(s) \geq 0$ tels que, pour tous $f, g \in H^s$,

$$\text{(2)} \qquad \|fg\|_s \leq A(\|f\|_{s_0}\|g\|_s + \|f\|_s\|g\|_{s_0}) + B(s)\|f\|_{s-1}\|g\|_{s-1}$$

et qu'on peut choisir $B(s) = 0$ si $s \leq s_0 + 2$.

PARTIE V. UN RÉSULTAT DE PERTURBATION.

Dans cette partie, on démontre le théorème de Nash après avoir construit une métrique G_0 de dimension d ayant les propriétés suivantes :

i) G_0 est représentable.

ii) Toute métrique suffisamment proche de G_0 est représentable.

Une application $F : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^∞ est dite *libre* si, pour tout point $y \in \mathbf{R}^p$, les $\dfrac{p(p+3)}{2}$ vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(y),\ 1 \leq \alpha \leq p,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y),\ 1 \leq \alpha \leq \beta \leq p$$

sont indépendants dans $\mathbf{R}^q$.

1. Soit $F : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ une application libre, et soit $P : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^∞ dont la différentielle est injective en tout point de $\mathbf{R}^d$. Montrer que $F \circ P$ est libre.

En utilisant l'application

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R}^p &\to \mathbf{R}^{p(p+3)/2} \\ y &\mapsto (y_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq p,\ y_\alpha y_\beta,\ 1 \leq \alpha \leq \beta \leq p) \end{aligned}$$

construire un élément libre P_0 de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ pour un certain N.

Dans la suite de cette partie, on se donne une application P_0 comme à la question 1 ci–dessus.

Pour tout $s > d/2$, on note $(H^s)^N$ l'espace des applications P de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^N$ dont les composantes $(P_1, ..., P_N)$ appartiennent à H^s (*voir* **IV**.2). On munit cet espace de la norme

$$\|P\|_s = \sup_{1 \leq \alpha \leq N} \|P_\alpha\|_s\,.$$

Par ailleurs, l'opérateur Δ introduit au **IV**.4 se prolonge aux fonctions vectorielles de classe C^2 composante par composante, c'est-à-dire

$$\Delta(P_1, ..., P_N) = (\Delta P_1, ..., \Delta P_N)\,.$$

Pour tout $s > (d/2) + 2$, on note $\mathcal{D}$ l'application linéaire de H^s dans H^{s-2} définie par $\mathcal{D}u = u - \Delta u$, et on désigne par $\mathcal{D}^{-1}$ son inverse (*voir* **IV**.4.b).

2. Soient $1 \leq i, j \leq d$. Pour tous $Q_1, Q_2 \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$, on pose

$$\mathcal{R}_{ij}(Q_1, Q_2) = \mathcal{D}\langle \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \frac{\partial Q_2}{\partial x_j}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \Delta Q_2\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \Delta Q_1, \frac{\partial Q_2}{\partial x_j}\rangle\,.$$

Montrer que, pour tout $s > (d/2) + 2$, $\mathcal{R}_{ij}$ se prolonge en une application bilinéaire (notée encore $\mathcal{R}_{ij}$) de $(H^s)^N \times (H^s)^N$ dans H^{s-2} telle qu'il existe $C_1(s) > 0$ vérifiant

$$\forall Q_1 \in (H^s)^N,\ \forall Q_2 \in (H^s)^N,\ \ \|\mathcal{R}_{ij}(Q_1, Q_2)\|_{s-2} \leq C_1(s)\|Q_1\|_s\,\|Q_2\|_s.$$

3. Soit $H \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$. On considère le système

$$(S)\qquad \begin{cases} \langle \dfrac{\partial P_0}{\partial x_i}, Q\rangle = \mathcal{D}^{-1}\langle \dfrac{\partial Q}{\partial x_i}, \Delta Q\rangle,\ 1 \leq i \leq d, \\ \langle \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}, Q\rangle = -\dfrac{H_{ij}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{R}_{ij}(Q, Q),\ 1 \leq i \leq j \leq d. \end{cases}$$

Montrer que toute solution $Q \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ de (S) vérifie $\Gamma(P_0 + Q) = \Gamma(P_0) + H$.

4. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on note $V(x)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^N$ engendré par

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_i}(x),\ 1 \leq i \leq d;\ \ \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ 1 \leq i \leq j \leq d\,.$$

Montrer que le système formé de (S) et de la condition

$$(P)\qquad \forall x \in \mathbf{R}^d,\ Q(x) \in V(x)$$

est équivalent à une équation du type

$$Q = \tilde{H} + \mathcal{B}(Q, Q)$$

où $\tilde{H}$ est donnée dans $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ et où, pour tout $s > (d/2) + 2$,

$$\mathcal{B} : (H^s)^N \times (H^s)^N \longrightarrow (H^s)^N$$

est une application bilinéaire telle qu'il existe $C_2(s) > 0$ vérifiant

$$\forall Q_1 \in (H^s)^N,\ \forall Q_2 \in (H^s)^N,\ \ \|\mathcal{B}(Q_1, Q_2)\|_s \leq C_2(s)\|Q_1\|_s\|Q_2\|_s\,.$$

5. Soit s_0 un réel supérieur à $d/2$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout élément H de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ vérifiant

$$\sup_{1 \leq i,j \leq d} \|H_{ij}\|_{s_0+2} \leq \varepsilon_0 \,,$$

l'équation

$$\Gamma(P) = \Gamma(P_0) + H$$

admette une solution $P \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ (on pourra poser, pour tout entier naturel k et pour tout $Q \in (H^{s_0+2+k})^N$, $N_k(Q) = \|Q\|_{s_0+2+k}$).

6. Soit $G_0 = \Gamma(P_0)$ et soit G une métrique quelconque de dimension d.
Montrer qu'il existe $t > 0$ et $H \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ tels que $G - tG_0 - H$ soit représentable en dimension N' pour un certain N', et que $tG_0 + H$ soit représentable en dimension N.
En déduire que G est représentable en dimension $N + N'$.