composition d'analyse **Durée : 6 heures**

Notations et Objectifs

Le but du problème est d'étudier, dans certains cas particuliers, les possibilités d'extension d'applications linéaires continues définies sur un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

Tous les espaces vectoriels normés considérés ont pour corps de base le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On note l_n^∞ et l_n^2 l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni respectivement des normes définies, pour un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, par $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2}$.

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. On note $B_E = \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité de E.

Si E et F sont des espaces vectoriels normés, on note $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires **continues** *de E dans F, muni de la norme usuelle $\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_F, x \in B_E\}$. On désigne par E' l'espace $L(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E, et par E'' l'espace $(E')'$.*

Si une application linéaire χ de E dans F vérifie, pour tout élément x de E, $\|\chi(x)\|_F = \|x\|_E$, on dit que χ réalise un plongement de E dans F. Si χ est, en outre, bijective, on dit que χ est une isométrie, et que E est isométrique à F.

Soient F un espace vectoriel, E et E_1 des sous-espaces vectoriels supplémentaires de F. On rappelle que le **projecteur** *$p = p_{E,E_1}$ de F sur E, parallèlement à E_1, est l'unique endomorphisme de F tel que, pour tout $x \in E$, on ait $p(x) = x$ et, pour tout $x \in E_1$, on ait $p(x) = 0$. La* **symétrie** *$s = s_{E,E_1}$ par rapport à E, parallèlement à E_1, est l'unique endomorphisme de F tel que, pour tout $x \in E$, on ait $s(x) = x$ et, pour tout $x \in E_1$, on ait $s(x) = -x$. Dans ces conditions, s et p sont liés par la relation $s = 2p - Id_F$, où Id_F désigne l'application identique de F. On rappelle qu'un endomorphisme p de F est un projecteur si, et seulement si, $p \circ p = p$, et qu'un endomorphisme s de F est une symétrie si, et seulement si, $s \circ s = Id_F$.*

E étant un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé F, on pose

$$\pi(E,F) = \inf_{E_1} \|p_{E,E_1}\| \quad \text{et} \quad \sigma(E,F) = \inf_{E_1} \|s_{E,E_1}\|,$$

les bornes inférieures portant sur tous les sous-espaces vectoriels E_1, supplémentaires de E dans F, tels que p_{E,E_1} soit continu. S'il n'existe pas de projecteur continu de F sur E, on écrit $\pi(E,F) = +\infty$ et $\sigma(E,F) = +\infty$.

Soit λ un réel supérieur ou égal à 1. On dit qu'un espace vectoriel normé E est de type $\mathcal{P}_\lambda$ si, pour tout espace vectoriel normé H, pour tout sous-espace vectoriel G de H, et pour toute application linéaire continue u de G dans E, il existe un prolongement continu v de u à H tel que $\|v\| \leqslant \lambda\|u\|$. On note alors $\omega(E)$ la borne inférieure de l'ensemble des réels λ tels que E soit de type $\mathcal{P}_\lambda$. Si E n'est de type $\mathcal{P}_\lambda$ pour aucune valeur de λ, on pose $\omega(E) = +\infty$.

On admet la forme suivante du **Théorème de Hahn-Banach** *: Soit G un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé H ; pour toute forme linéaire continue x^* de G', il existe un prolongement y^* appartenant à H', de même norme que x^*, c'est-à-dire tel que $\|y^*\| = \|x^*\|$ et $y^*|_G = x^*$. Il revient au même de dire que $\mathbb{R}$ est de type $\mathcal{P}_1$.*

La partie I étudie des exemples.

La partie II est consacrée à des résultats préliminaires.

La partie III établit, pour certains sous-espaces vectoriels E de l_n^∞, une minoration de $\pi(E, l_n^\infty)$.

Dans la partie IV on démontre le théorème de John, qui entraîne une majoration générale de $\pi(E,F)$ en fonction de $\dim F$.

Les parties III et IV sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : Étude d'exemples

A. *Cas des espaces euclidiens*

Soit n un entier strictement positif. Dans cette question et la suivante, F désigne un espace euclidien de dimension n.

1 °) Établir que F est isométrique à l_n^2.

2 °) **a)** Soient E et E_1 des sous-espaces vectoriels supplémentaires de F, et p le projecteur sur E parallèlement à E_1. On suppose $E \neq \{0\}$. Montrer que l'égalité $\|p\| = 1$ est vraie si, et seulement si, E et E_1 sont orthogonaux.

b) En déduire que l'égalité $\pi(E, F) = 1$ est vraie pour tout sous-espace vectoriel non nul E de F.

B. *Exemples dans l_n^∞*

Dans la suite de cette partie, on note $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3 °) Soit u un endomorphisme de l_n^∞, représenté par la matrice $A = (a_{ij})$ dans la base e. Établir que la norme de u est donnée par la formule :

$$\|u\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

4 °) Dans cette question $n = 3$. On considère le plan H d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dans la base e. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = |1 - t| + 2|t|$.

a) Soient α_1, α_2 et α_3 trois réels liés par la relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, D la droite dirigée par le vecteur $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Donner la matrice du projecteur $p_{H,D}$ dans la base e et vérifier que $\|p_{H,D}\| = \max(\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3))$.

b) Montrer que la fonction φ est convexe. En déduire que $\|p_{H,D}\| \geqslant 4/3$. Étudier le cas d'égalité.

Calculer $\pi(H, l_3^\infty)$.

c) Calculer de même $\sigma(H, l_3^\infty)$.

5 °) On suppose à présent $n \geqslant 3$. Soit H_n l'hyperplan de l_n^∞ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base e. En s'inspirant de la méthode de la question précédente, calculer $\pi(H_n, l_n^\infty)$ et $\sigma(H_n, l_n^\infty)$.

Partie II : Conséquences du théorème de Hahn-Banach

A. *Encadrements de $\pi(E,F)$ et de $\sigma(E,F)$*

1 °) Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et ψ une forme n-linéaire alternée, non nulle, sur E.

a) Montrer que ψ atteint un maximum sur $(B_E)^n$.

b) Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in (B_E)^n$ tel que $\psi(e)$ soit maximum. Vérifier que e est libre et que les vecteurs e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont de norme 1.

On définit la base duale $e^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ de la base e, par les relations $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$; ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Montrer que les vecteurs e_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont de norme 1.

c) Établir que E est de type $\mathcal{P}_n$.

2 °) a) Soient E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et x un élément de E. Montrer qu'il existe un élément x^* de $B_{E'}$ tel que $x^*(x) = \|x\|$.

b) En déduire que l'application canonique χ de E dans E'' définie par la relation $\chi(x)(x^*) = x^*(x)$ est un plongement.

c) Soient E et F des espaces vectoriels normés, et u une application linéaire continue de E dans F. On définit sur F' l'application transposée ${}^t u$ de u, par ${}^t u(y^*) = y^* \circ u$ pour tout y^* de F'. Montrer que ${}^t u \in L(F', E')$ et que $\|{}^t u\| = \|u\|$.

3 °) Soient F un espace vectoriel normé de dimension finie, et E un sous-espace vectoriel de F. On note $E^\perp$ l'ensemble des éléments de F' dont le noyau contient E.

a) Prouver que l'application $s \mapsto -{}^t s$ établit une bijection entre les symétries de F par rapport à E et les symétries de F' par rapport à $E^\perp$.

b) En déduire les inégalités suivantes :

$$\pi(E,F) - 1 \leqslant \pi(E^\perp, F') \leqslant \pi(E,F) + 1.$$

c) Montrer que si E est un hyperplan de F les inégalités $\sigma(E,F) \leqslant 3$ et $\pi(E,F) \leqslant 2$ sont vérifiées. Peut-on améliorer ces inégalités ?

B. *Étude de ω*

4 °) Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé F. On suppose E de type $\mathcal{P}_\lambda$. Établir l'inégalité $\pi(E,F) \leqslant \lambda$.

5 °) a) Soit n un entier naturel. Prouver que l_n^∞ est de type $\mathcal{P}_1$.

b) Plus généralement, soit X un ensemble non vide. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est de type $\mathcal{P}_1$.

c) En déduire que tout espace vectoriel normé peut être plongé dans un espace vectoriel normé de type $\mathcal{P}_1$ (on pourra appliquer ce qui précède pour $X = B_{E'}$).

6 °) Soient E un espace vectoriel normé, μ un nombre réel. Prouver l'équivalence des propositions (i) et (ii) suivantes :

(i) Il existe un espace vectoriel normé F de type $\mathcal{P}_1$, et un plongement $\chi : E \to F$ tels que $\pi(\chi(E), F) = \mu$.

(ii) $\omega(E) = \mu$.

Partie III : Les minorations de Sobczyk

1 °) Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

a) Soient p et q des endomorphismes *a priori* quelconques de F. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que p et q soient des projecteurs sur un même sous-espace vectoriel E de F est qu'ils vérifient les relations $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

b) Soient s une symétrie de F par rapport à un sous-espace vectoriel E de F, et v un endomorphisme de F. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $s' = s + v$ soit une symétrie par rapport à E est que s et v vérifient les relations $s \circ v = v$ et $v \circ s = -v$.

Si de plus F est de dimension finie, montrer que, dans ces conditions, la trace de v est nulle.

2 °) Soit n un entier strictement positif; on désigne par I_n la matrice unité d'ordre n et par $\mathcal{H}(n)$ l'ensemble des matrices carrées A d'ordre n, symétriques, dont tous les coefficients sont égaux à ± 1, et qui vérifient la relation $A^2 = nI_n$ (*matrices de Hadamard symétriques* ; on verra plus loin que $\mathcal{H}(n)$ est non vide pour une infinité de valeurs de n).

Soient n tel que $\mathcal{H}(n) \neq \emptyset$, $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{H}(n)$, s l'endomorphisme de l_n^∞ représenté par la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{n}}A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Vérifier que s est une symétrie de l_n^∞ par rapport à un sous-espace vectoriel E_A de l_n^∞. On note (s_{ij}) sa matrice dans la base canonique.

Soit v un endomorphisme de l_n^∞ tel que $s + v$ soit également une symétrie par rapport à E_A. On note (v_{ij}) la matrice de v dans la base canonique. Montrer que, pour tout entier $i \in [1, n]$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$1 - v_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + v_{ij}) s_{ij} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \|s + v\|.$$

b) Établir les inégalités $\sigma(E_A, l_n^\infty) \geqslant \sqrt{n}$ et $\pi(E_A, l_n^\infty) \geqslant \dfrac{\sqrt{n} - 1}{2}$.

3 °) On pose $A_0 = (1)$, et on définit une suite de matrices (A_k) par la relation de récurrence suivante :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & A_k \\ A_k & -A_k \end{pmatrix},$$

(la matrice A_{k+1} est donc ainsi définie *par blocs*). Prouver que A_k est un élément de $\mathcal{H}(2^k)$ pour tout k. Quelle est la dimension de l'espace E_{A_k} associé à A_k ?

4 °) a) Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé F. Établir que, si $\pi(E, F) < \infty$, alors E est fermé dans F.

b) Soit $F = l^\infty = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites bornées de nombres réels, muni de la norme $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n \geqslant 0} |a_n|$. Pour tout entier naturel k, on note F_k le sous-espace vectoriel de F défini par les relations suivantes :

$$F_k = \{(a_n) \in F,\ \forall n \notin [2^k, 2^{k+1}[,\ a_n = 0\}.$$

Construire une suite (E_k) de sous-espaces vectoriels de F telle que, pour tout k, on ait $E_k \subset F_k$, et telle que $\pi(E_k, F_k) \longrightarrow +\infty$.

Soit E l'adhérence dans F de la somme $\bigoplus_{k \geqslant 0} E_k$. Établir les égalités $\pi(E, F) = +\infty$ et $\omega(E) = +\infty$.

Partie IV : Le théorème de John

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note Q (respectivement Q_+) l'espace vectoriel des formes quadratiques (respectivement l'ensemble des formes quadratiques définies positives) sur $\mathbb{R}^n$. On appelle ellipsoïde toute partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$, où $q \in Q_+$.

Si f est une fonction mesurable et positive sur $\mathbb{R}^n$, et A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, on note $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ (respectivement $\int_A f(x)\,\mathrm{d}\,x$) l'intégrale de Lebesgue de f (respectivement l'intégrale de f sur la partie A). En particulier $v(A) = \int_A \mathrm{d}\,x$ désigne le volume de A.

Dans la sous-partie **A** *on établit le* **théorème de John** *: Pour toute norme N sur $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{q \in Q_+, q \leqslant N^2\}$ possède un unique élément q_N tel que le volume $v(\mathcal{E}_{q_N})$ de l'ellipsoïde associé soit minimum ; de plus q_N vérifie l'inégalité $N^2 \leqslant nq_N$.*

La sous-partie **B** *est consacrée à des applications.*

A. *Preuve du théorème*

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1 °) a) Soit $q \in Q$; montrer que l'application $x \mapsto e^{-q(x)}$ est intégrable si, et seulement si, $q \in Q_+$. On note $I(q) = \int e^{-q(x)}\,\mathrm{d}\,x$ (par suite, $I(q)$ vaut $+\infty$ lorsque q n'est pas élément de Q_+).

b) Soit $q \in Q_+$; établir la relation suivante :

$$I(q) = v(\mathcal{E}_q)\int_0^\infty t^{n/2}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

(on pourra par exemple calculer l'intégrale double $\iint_C e^{-t}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t$, étendue à l'ensemble $C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t \geqslant q(x)\}$).

c) Établir que I définit une application continue de Q (muni de sa topologie usuelle d'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$) dans $\overline{\mathbb{R}}$ (muni de sa topologie usuelle).

2 °) On se propose dans cette question d'établir l'existence et l'unicité de q_N.

a) Montrer que la partie K de Q définie par l'égalité suivante :

$$K = \{q \in Q, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant q(x) \leqslant N^2(x)\}$$

est une partie convexe et compacte de Q. Vérifier que $K \cap Q_+$ n'est pas vide.

b) Prouver l'existence de $q_N \in K \cap Q_+$ tel que $I(q_N) = \min\{I(q), q \in K\}$.

c) Soit $q \in K \cap Q_+$ telle que $I(q) = I(q_N)$. Montrer que $q = q_N$. (On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $I\left(\dfrac{q+q_N}{2}\right)$).

3 °) Le but de cette question est d'établir l'inégalité suivante, valable pour tout x de $\mathbb{R}^n$:

$$N^2(x) \leqslant nq_N(x).$$

a) Établir l'existence d'un élément a de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les relations :

$$q_N(a) = 1 \quad \text{et} \quad N(a) = \max\{N(x), q_N(x) = 1\}.$$

Dans la suite de cette question, on munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne associée à q_N. On note H l'hyperplan orthogonal à a, π_a le projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{R}.a$ et π_H le projecteur orthogonal sur H.

b) Soit $y \in H$, montrer que l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = N(a + ty)$ est convexe, et vérifie, pour tout nombre réel t, l'inégalité :

$$\varphi(t) \leqslant N(a)\sqrt{1 + t^2 q_N(y)}.$$

En déduire que $\varphi(t)$ présente un minimum pour $t = 0$, puis établir la relation, valable pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$:

$$N(\pi_a(x)) \leqslant N(x).$$

c) Soient ε et δ deux réels strictement compris entre 0 et 1. On pose

$$q(x) = (1+\varepsilon)q_N(\pi_a(x)) + (1-\delta)q_N(\pi_H(x)).$$

Vérifier que l'on définit ainsi un élément q de Q_+, et établir les relations suivantes :

$$I(q) = (1+\varepsilon)^{-1/2}(1-\delta)^{-(n-1)/2} I(q_N), \quad \text{et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) \leqslant N^2(x) - [\delta N^2(x) - (\delta+\varepsilon)q_N(\pi_a(x))] \leqslant N^2(x) - \left[\delta - \frac{\delta+\varepsilon}{N^2(a)}\right] N^2(x).$$

d) Montrer que l'hypothèse $N^2(a) > n$ entraîne l'existence d'un couple (ε, δ) tel que $q \in K$ et $I(q) < I(q_N)$. Conclure.

4 °) *Majoration de $\sigma(E,F)$ et de $\pi(E,F)$.*

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie n. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel E de F on a $\sigma(E,F) \leqslant \sqrt{n}$ et $\pi(E,F) \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{2}$. Comparer ces majorations aux minorations obtenues au III.

B. *Compléments*

5 °) Expliciter la forme quadratique q_N lorsque $N = \| \|_\infty$. Établir que, si C est un nombre réel strictement inférieur à n, l'inégalité $q \leqslant \| \|_\infty^2 \leqslant Cq$ n'est vérifiée par aucun élément q de Q_+. (On pourra, par exemple, considérer, pour $q \in Q_+$, l'expression

$$\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} q(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n),$$

où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

6 °) *Sous-groupes compacts de $GL(\mathbb{R}^n)$.*

Soit G un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer que, pour tout $g \in G$, $|\det(g)| = 1$.

b) On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) = \sup\limits_{g\in G}(\|g(x)\|_\infty)$. Établir que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, et que G est contenu dans le groupe orthogonal de q_N.

7 °) *Autre formulation du théorème de John.*

Établir la forme suivante du théorème de John :

Soit $\| \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité associée. Alors B contient un unique ellipsoïde $\mathcal{E}$ de volume maximum, et cet ellipsoïde vérifie les relations : $\mathcal{E} \subset B \subset \sqrt{n}\,\mathcal{E}$.