concours externe de recrutement de professeurs agrégés

composition d'analyse

Durée : 6 heures

Avertissement

Les opérations analytiques sur les matrices telles que limite, sommation, dérivation,... sont effectuées sur chaque élément. Par exemple, la matrice A (n) d'éléments $a_{ij}(n)$ tend vers la matrice B d'éléments b_{ij} lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si l'on a $b_{ij} = \lim\limits_{n \to \infty} a_{ij}(n)$ quels que soient i et j; si U (t) est la matrice d'éléments $u_{ij}(t)$, l'intégrale $\int_a^b \mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t$ est la matrice d'éléments $\int_a^b u_{ij}(t)\,\mathrm{d}t$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Soit donnée une famille de nombres complexes $a(m, n)$ pour $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ entiers. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs c_n avec les propriétés :

(1) $$\text{pour tout } m \quad |a(m, n)| \leqslant c_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty .$$

On suppose que, pour tout $n \geqslant 0$, la limite suivante existe :

(2) $$\lim_{m \to +\infty} a(m, n) = b_n .$$

Montrer que les deux séries $a_m = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a(m, n)$ et $b = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent et que l'on a $\lim\limits_{m \to +\infty} a_m = b$, soit explicitement

(3) $$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a(m, n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m \to +\infty} a(m, n) .$$

2. On suppose donnée une suite de polynômes $\mathrm{P}_m(z)$ (pour $m \geqslant 0$) et une série entière $\Phi(z)$ de rayon de convergence R. On pose

(4) $$\mathrm{P}_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(m, n)\, z^n, \qquad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

et l'on suppose la relation (2) satisfaite. On introduit la série majorante $\mathrm{F}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$ avec la définition

(5) $$\gamma_n = \sup_{m \geqslant 0} |a(m, n)| ;$$

on suppose que cette série a un rayon de convergence $\mathrm{R}' > 0$.

a. Prouver la relation $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}'$, d'où $\mathrm{R} > 0$.

b. Soit c un nombre réel tel que $0 < c < \mathrm{R}'$, et soit D_c l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| \leqslant c$. Montrer que l'on a

$$\lim_{m \to +\infty} \mathrm{P}_m(z) = \Phi(z). \tag{6}$$

uniformément pour z parcourant D_c.

c. Examiner le cas des polynômes

$$\mathrm{P}_m(z) = \frac{1}{m+1}(1 + z + \cdots + z^m). \tag{7}$$

On déterminera les séries entières $\Phi(z)$ et $\mathrm{F}(z)$, leurs rayons de convergence R et R′. La relation (6) est vraie pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \mathrm{R}'$; on examinera le cas des nombres z tels que $\mathrm{R}' \leqslant |z| < \mathrm{R}$.

3. On rappelle la définition de la série exponentielle : $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Déduire de ce qui précède la formule bien connue :

$$\exp z = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m. \tag{8}$$

4. Pour tout entier $d \geqslant 1$, on note $\Phi_d(q)$ le *polynôme cyclotomique* d'ordre d. On rappelle que $\Phi_d(q)$ est donné par

$$\Phi_d(q) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \wedge d = 1}} \left(q - \exp \frac{2ik\pi}{d}\right) \tag{9}$$

et que l'on a la formule :

$$q^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(q),$$

où le produit est étendu aux diviseurs d de n. On introduit aussi une suite de polynômes $\Pi_n(q)$ par

$$\begin{cases} \Pi_0(q) = 1 \\ \Pi_n(q) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{q^i - 1}{q - 1} \qquad \text{pour } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

a. Établir la formule :

$$\text{pour } n \geqslant 2 \qquad \Pi_n(q) = \prod_{d=2}^{n} \Phi_d(q)^{[n/d]}, \tag{11}$$

où $[x]$ désigne la partie entière d'un nombre réel $x \geqslant 0$.

b. Soient n et i deux entiers tels que $0 \leqslant i \leqslant n$. On introduit la fraction rationnelle

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_i(q)\,\Pi_{n-i}(q)}. \tag{12}$$

Par application de *a.*, prouver que $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ est un *polynôme* en q. Montrer que ses racines sont des racines de l'unité et qu'elles sont simples.

c. Établir la relation de récurrence : (13) $\begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q + q^{n-i+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix}_q \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$

On définit $(z;q)_n$ par la règle

(14)
$$\begin{cases} (z;q)_0 = 1 \\ (z;q)_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + q^{i-1} z) \qquad \text{pour } n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Établir la relation

(15)
$$(z;q)_n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q q^{i(i-1)/2} z^i \qquad \text{pour } n \geqslant 0\,.$$

d. Calculer la valeur de $\Pi_n(q)$ et de $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ pour $q = 1$; spécialiser au cas $q = 1$ les résultats du *c.*

5. Soit q un nombre complexe de module différent de 1. On introduit la série entière (en la variable z) :

(16)
$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{\Pi_n(q)} z^n\,.$$

a. Déterminer selon les valeurs de q le rayon de convergence R_q de la série précédente.

b. Les polynômes $P_{m,q}(z)$ sont définis comme suit :

(17)
$$P_{m,q}(z) = \prod_{i=1}^{m} (1 - (q-1)\, q^{i-1} z)\,.$$

On suppose qu'on a $|q| < 1$. Par application de la question 2, établir la relation

(18)
$$e_q(z) = \lim_{m \to +\infty} P_{m,q}(z)$$

avec convergence uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

c. On suppose q réel et $0 < q < 1$. Établir la formule

(19)
$$\mathit{lim}_{q \to 1}\ e_q(z) = \exp z$$

avec convergence uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

d. On suppose donnés $\varepsilon > 0$ et $c > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait :

(20)
$$|\exp z - P_{m,q}(z)| < \varepsilon$$

si les nombres z, m, q satisfont aux relations suivantes :

$$1 - \delta < q < 1\,, \qquad q^m < \delta\,, \qquad |z| \leqslant c\,.$$

DEUXIÈME PARTIE

1. Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ deux entiers. On note $M_{p,q}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices rectangulaires à p lignes et q colonnes, à éléments complexes.

a. Montrer qu'on définit sur cet espace une norme par la formule

(1) $$\| A \|_{p,q} = \sup_{1 \leqslant j \leqslant q} \sum_{i=1}^{p} | a_{ij} |,$$

où A est la matrice d'éléments a_{ij}.

b. Établir la relation

(2) $$\| {}^t A \|_{q,p} \leqslant q \cdot \| A \|_{p,q}$$

pour A dans $M_{p,q}(\mathbb{C})$; on a noté ${}^tA$ la matrice transposée de A. Peut-on améliorer cette inégalité ?

c. Établir la formule

(3) $$\| AB \|_{p,r} \leqslant \| A \|_{p,q} \cdot \| B \|_{q,r}$$

où A appartient à $M_{p,q}(\mathbb{C})$ et B à $M_{q,r}(\mathbb{C})$.

Dans la suite, on ne considère plus que des matrices *carrées*, et l'on écrit simplement $\| A \|$ pour $\| A \|_{N,N}$ lorsque A appartient à $M_N(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire à $M_{N,N}(\mathbb{C})$).

2. *a.* Démontrer que la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \| A(n) \| < +\infty$ suffit à établir la convergence de la série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} A(n)$.

b. Soit $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Soit A une matrice carrée d'ordre N telle que $\| A \| < R$. Démontrer que la série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n A^n$ converge; la somme est notée $\Phi(A)$.

c. Soit donnée une suite de polynômes $(P_m(z))_{m \geqslant 0}$. On suppose que, pour chaque entier $n \geqslant 0$, le coefficient de z^n dans $P_m(z)$ a pour limite le coefficient correspondant dans $\Phi(z)$ (lorsque m tend vers l'infini). Par analogie avec la question I.2., donner des conditions de validité de la formule

(4) $$\lim_{m \to +\infty} P_m(A) = \Phi(A).$$

d. L'exponentielle d'une matrice A dans $M_N(\mathbb{C})$ est définie par la série

(5) $$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dont on établira la convergence. Démontrer que l'on a :

(6) $$\exp A = \lim_{m \to +\infty} \left(I + \frac{A}{m} \right)^m,$$

où I est la matrice unité d'ordre N.

e. On reprend les notations de I.5. Soit A une matrice dans $M_N(\mathbb{C})$. Démontrer que, pour tout nombre complexe q tel que $| q | < 1$, on a :

(7) $$e_q(A) = \lim_{m \to +\infty} \prod_{i=0}^{m-1} (I - (q-1) q^i A).$$

Établir ensuite la formule

(8) $$\exp A = \lim_{q \to 1} e_q(A),$$

où la limite est prise sur les nombres réels q tels que $0 < q < 1$. A-t-on une relation de double limite comme dans la formule (20) de I.5.*d.*?

f. On suppose que la matrice A est *diagonalisable* sous la forme $A = S \Lambda S^{-1}$, où S est inversible dans $M_N(\mathbb{C})$, et où Λ est diagonale d'éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Déterminer la matrice $\Phi(A)$ et en particulier $\exp A$ et $e_q(A)$. Commenter les résultats des sections *c., d.* et *e.* dans ce cas.

3. On introduit une suite de polynômes de la forme

(9) $$P_m(z) = (1 + \varepsilon_{m,1} z) \ldots (1 + \varepsilon_{m,p_m} z) \qquad (m \geqslant 1)$$

et l'on fait les hypothèses suivantes :

α. il existe une suite $(\alpha_m)_{m \geqslant 1}$ de nombres positifs tendant vers 0 et telle que $|\varepsilon_{m,i}| \leqslant \alpha_m$ pour $1 \leqslant i \leqslant p_m$;

β. il existe un nombre $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|\varepsilon_{m,1}| + \ldots + |\varepsilon_{m,p_m}| \leqslant C$$

pour tout $m \geqslant 1$;

γ. la limite suivante existe :

$$c = \lim_{m \to +\infty} (\varepsilon_{m,1} + \ldots + \varepsilon_{m,p_m}).$$

a. Démontrer que dans le polynôme $P(z) = (1 + a_1 z) \ldots (1 + a_p z)$, le module du coefficient de z^n est majoré par $\frac{1}{n!}(|a_1| + \ldots + |a_p|)^n$.

b. Pour tout entier n avec $n \geqslant 0$, on note $s_n(m)$ le coefficient de z^n dans le polynôme $P_m(z)$. Calculer la limite de $s_1(m)$ et de $s_2(m)$ pour m tendant vers $+\infty$.

c. Établir la formule

(10) $$\exp cz = \lim_{m \to +\infty} P_m(z)$$

pour tout nombre complexe z. (On pourra former $s_1(m)\, s_n(m) - (n+1)\, s_{n+1}(m)$.)

d. Établir la relation

(11) $$\exp cA = \lim_{m \to +\infty} (I + \varepsilon_{m,1} A) \ldots (I + \varepsilon_{m,p_m} A)$$

pour toute matrice A dans $M_N(\mathbb{C})$. Examiner le cas des matrices diagonalisables.

e. Montrer comment retrouver la formule (6) en spécialisant convenablement les nombres $\varepsilon_{m,i}$.

TROISIÈME PARTIE

On note $J =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $t \mapsto A(t)$ une application continue de J dans l'espace $M_N(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre N à coefficients complexes.

1. Soient t_0 et t_1 deux points de J tels que $t_0 \leqslant t_1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Δ_n l'ensemble des points $(s_1, \dots, s_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$t_0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots s_n \leqslant t_1 .$$

On définit aussi l'intégrale matricielle

(1) $$U_n(t_1, t_0) = \int_{\Delta_n} A(s_n) \dots A(s_1)\, ds_1 \dots ds_n,$$

et l'on pose :

(2) $$U_0(t_1, t_0) = I \qquad \text{(matrice unité d'ordre N).}$$

a. Montrer que la série matricielle

(3) $$U(t_1, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t_1, t_0) \qquad (t_0 \leqslant t_1)$$

converge. En particulier, on a $U(t_0, t_0) = I$.

b. Soient t_0, t_1, t_2 trois points de J tels que $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. Établir la relation

(4) $$U_n(t_2, t_0) = \sum_{p=0}^{n} U_p(t_2, t_1)\, U_{n-p}(t_1, t_0) \qquad (n \geqslant 0)$$

et en déduire qu'on a :

(5) $$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)\, U(t_1, t_0).$$

c. Établir l'inégalité

(6) $$\| U(t_1, t_0) - I \| \leqslant \left\{ \exp \int_{t_0}^{t_1} \| A(s) \| \, ds \right\} - 1$$

pour $t_0 \leqslant t_1$.

d. Soit B une matrice telle que $\| B \| < 1$. Montrer que la matrice $I + B$ est inversible.

e. Montrer que la matrice $U(t_1, t_0)$ est inversible (on pourra d'abord supposer $t_1 - t_0$ assez petit, puis raisonner par compacité).

2. Soient t_0, t_1 deux points de J. On a défini $U(t_1, t_0)$ lorsque $t_0 \leqslant t_1$; lorsque l'on a $t_0 > t_1$, on note $U(t_1, t_0)$ l'inverse de $U(t_0, t_1)$.

a. Montrer que la formule (5) reste valable quels que soient t_0, t_1, t_2 dans J.

b. Montrer que l'application $(t_0, t_1) \mapsto \mathrm{U}(t_1, t_0)$ de $\mathrm{J} \times \mathrm{J}$ dans $\mathrm{M_N}(\mathbb{C})$ est *continue.* (On pourra utiliser les formules (5) et (6).)

3. *a.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une application continue A_n de $\mathrm{J}^n = \mathrm{J} \times \ldots \times \mathrm{J}$ (n facteurs) dans $\mathrm{M_N}(\mathbb{C})$ par la formule

(7) $$\mathrm{A}_n(s_1, \ldots, s_n) = \mathrm{A}(s'_n) \ldots \mathrm{A}(s'_1)$$

où $s'_1, \ldots, s'_n$ est le réarrangement en ordre croissant de la suite $s_1, \ldots, s_n$. Montrer que l'on a :

(8) $$\mathrm{U}_n(t_1, t_0) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t_1} \ldots \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{A}_n(s_1, \ldots, s_n)\, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n$$

lorsque $t_0 \leqslant t_1$.

b. On suppose que les matrices $\mathrm{A}(t)$ commutent deux à deux. Déduire de la formule (8) la relation

(9) $$\mathrm{U}(t_1, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{A}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Interpréter la formule (5) dans ce cas.

c. Étudier les deux cas particuliers suivants :

– $\mathrm{A}(t)$ est une matrice diagonale ;

– $\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}$ est indépendante de t.

4. On suppose qu'on a $t_0 \leqslant t_1$. Calculer explicitement la matrice $\mathrm{U}(t_1, t_0)$ dans les cas suivants :

a. $\mathrm{N} = 2$ et la matrice $\mathrm{A}(t)$ est triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix};$$

b. $\mathrm{N} = 3$ et la matrice $\mathrm{A}(t)$ est triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a(t) & b(t) \\ 0 & 0 & c(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5. Soient t_0 et t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$. Pour chaque entier $p \geqslant 1$, on suppose donnée une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_1]$ en p intervalles au moyen des points de subdivision $s_1^{(p)}, \ldots, s_{p-1}^{(p)}$ tels que

$$t_0 < s_1^{(p)} < s_2^{(p)} < \ldots < s_{p-2}^{(p)} < s_{p-1}^{(p)} < t_1.$$

On pose $s_0^{(p)} = t_0$, $s_p^{(p)} = t_1$ et $\Delta s_i^{(p)} = s_{i+1}^{(p)} - s_i^{(p)}$. On pose :

$$\varepsilon_p = \max(\Delta s_0^{(p)}, \ldots, \Delta s_{p-1}^{(p)}).$$

Montrer que sous l'hypothèse $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$, on a

(10) $$U(t_1, t_0) = \lim_{p \to +\infty} (I + A(s_{p-1}^{(p)})\Delta s_{p-1}^{(p)}) \dots (I + A(s_0^{(p)})\Delta s_0^{(p)}).$$

Cas particulier : A (t) = A est indépendante de t.

6. On considère deux familles de produits de matrices
$$U_p = (I + A_{p,1}) \dots (I + A_{p,p}) \text{ et } V_p = (I + B_{p,1}) \dots (I + B_{p,p}).$$
On suppose qu'il existe une suite de nombres $\varepsilon_p > 0$ tendant vers 0 et tels que l'on ait

(11) $$\| B_{p,i} - A_{p,i} \| \leqslant \varepsilon_p \| A_{p,i} \| \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

On suppose aussi que la suite des nombres $\sum_{i=1}^{p} \| A_{p,i} \| = C_p$ est bornée. Montrer que la suite $(U_p)_{p \geqslant 1}$ converge si et seulement si la suite $(V_p)_{p \geqslant 1}$ converge, et que les deux limites sont égales.

7. De ce qui précède, déduire la formule

(12) $$\exp(A + B)t = \lim_{p \to +\infty} \left[\left(I + \frac{At}{p} \right) \left(I + \frac{Bt}{p} \right) \right]^p = \lim_{p \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{At}{p} \right) \cdot \exp\left(\frac{Bt}{p} \right) \right]^p.$$

Que peut-on dire lorsque les matrices A et B commutent ?

QUATRIÈME PARTIE

On conserve les notations et les hypothèses de la troisième partie, mais les résultats qu'on va établir ne dépendent que des questions III.1 *et* III.2.

1. *a.* Établir la formule

(1) $$A(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [U(t + h, t) - I]$$

pour t dans J.

b. En déduire les deux relations différentielles

(2) $$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_0) = A(t_1) U(t_1, t_0)$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial t_0} U(t_1, t_0) = - U(t_1, t_0) A(t_0)$$

pour t_0, t_1 dans J.

c. Soient t_0 dans J et $\boldsymbol{x}_0$ dans $\mathbb{C}^N$. Montrer que l'équation différentielle

(E) $$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A(t)\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (t \in J),$$

où $\boldsymbol{x}(t)$ est un vecteur dans $\mathbb{C}^N$ dépendant de t, avec la condition initiale $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, admet pour unique solution

(4) $$\boldsymbol{x}(t) = U(t, t_0)\,\boldsymbol{x}_0 .$$

Autrement dit, $U(t_1, t_0)$ est la *résolvante* de l'équation différentielle (E).

d. Commenter le rapport entre la question III.5. et la méthode d'Euler pour résoudre les équations différentielles.

2. On suppose que l'on a $A(t) = B(t) + C(t)$, où $B(t)$ et $C(t)$ sont des matrices dépendant continûment de t. On fixe t_0 dans J et l'on écrit $U_A(t, t_0)$ pour $U(t, t_0)$ et $U_B(t, t_0)$ pour l'expression analogue où l'on remplace $A(t)$ par $B(t)$.

Montrer qu'on a

(5) $$U_A(t, t_0) = U_B(t, t_0)\,H(t),$$

où la matrice $H(t)$ satisfait à l'équation différentielle

(6) $$\frac{d}{dt}H(t) = D(t)\,H(t)$$

avec la définition

(7) $$D(t) = U_B(t_0, t)\,C(t)\,U_B(t, t_0).$$

La condition initiale est $H(t_0) = I$. Déduire de là (lorsque $t \geqslant t_0$) une représentation de $H(t)$ sous forme d'une série comme en III.

3. Soient B et C deux matrices dans $M_N(\mathbb{C})$, et soit $t \geqslant 0$. De ce qui précède, déduire la relation

(8) $$\exp(-Bt)\cdot\exp(B + C)\,t = I + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} V(s_n)\ldots V(s_1)\,ds_1\ldots ds_n ,$$

où l'on a posé

(9) $$V(t) = (\exp - Bt)\,C\,(\exp Bt).$$

On précisera le domaine d'intégration E_n.

4. Montrer que $V(t)$ satisfait à l'équation différentielle

(10) $$\frac{d}{dt}V(t) = [V(t), B],$$

(avec l'abréviation $[L, M] = LM - ML$) et qu'elle est donnée par la formule de Lie :

(11) $$V(t) = C + t[C, B] + \frac{t^2}{2}[[C, B], B] + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}[\ldots[[C, \underbrace{B], B]\ldots, B}_{m}].$$