concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition d'analyse

Durée : 6 heures

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Dans tout le problème, $\mathbf{R}^+$ désigne l'intervalle réel $[0, +\infty[$.

Lorsque f est une fonction bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, on note $\|f\|_\infty$, ou par abus $\|f(x)\|_\infty$, la borne supérieure de $|f|$ sur $\mathbf{R}$.

Un **poids** sur $\mathbf{R}$ est une application réglée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$. Mentionnons qu'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite réglée si elle possède des limites à droite et à gauche en tout point ; une telle application est alors bornée sur tout segment de $\mathbf{R}$.

Si X et Y sont deux espaces topologiques, $\mathscr{C}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications continues de X dans Y. On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'algèbre des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ possédant des dérivées à tous ordres.

Lorsque z est dans $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$, on désigne par $\mathscr{H}_z$ la sous-algèbre de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ engendrée par les fonctions de la variable réelle t :

$$g_z(t) = \frac{1}{t - z} \qquad \text{et} \qquad \bar{g}_z(t) = \frac{1}{t - \bar{z}} \quad .$$

On utilisera librement le théorème de Stone-Weierstrass, sous sa forme usuelle ou sous la forme suivante :

Soit X un espace compact ; on munit $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ de la norme de la convergence uniforme, et l'on se donne une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ (non nécessairement unitaire) telle que :

(i) Si la fonction f est dans $\mathscr{A}$, la fonction conjuguée $\bar{f}$ est aussi dans $\mathscr{A}$.

(ii) Pour tout x et tout y de X, distincts, il existe f dans $\mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Alors on est dans l'un des deux cas suivants :

Cas n° 1 : $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$;

Cas n° 2 : Il existe a dans X tel que $\mathscr{A}$ soit dense dans l'algèbre des fonctions continues de X dans $\mathbf{C}$ s'annulant au point a.

On notera $\mathscr{P}_{\mathbf{R}}$ l'algèbre des fonctions polynômes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ l'algèbre des fonctions polynômes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

Le but du problème est d'étudier à quelle condition $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ est un sous-espace dense de certains espaces vectoriels normés de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, puis de tirer quelques conséquences des résultats obtenus.

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

A. Une propriété des transformées de Laplace

1. *a.* Soit g une fonction continue du segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit (P_n) une suite de $\mathscr{P}_{\mathbf{R}}$ convergeant uniformément vers g sur $[a, b]$. Montrer que la suite $\left(\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_a^b g^2(t)\, \mathrm{d}t$.

   b. Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, telle que $\int_a^b f(t) t^n\, \mathrm{d}t = 0$ pour tout n dans $\mathbf{N}$. Montrer que f est nulle. On pourra employer le théorème de Stone-Weierstrass.

   c. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \exp\left(-x^{\frac{1}{4}}\right) \sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$. Montrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$:

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^n \mathrm{d}x = 0 \, .$$

   Qu'en conclure ?

A SUIVRE

2. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{C}$. Lorsque s est dans $\mathbf{R}$, on pose, si l'intégrale converge,

$$\mathrm{L}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Soit s_0 dans $\mathbf{R}$. Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ converge, montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $s > s_0$.

Indication : introduire la fonction $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ et effectuer une intégration par parties.

b. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\mathrm{L}(s) = 0$ pour tout nombre réel $s \geqslant s_0$.

(i) Avec les notations du 2.*a.* prouver que $\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{e}^{-(s-s_0)t}\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout nombre réel $s > s_0$.

(ii) En utilisant un changement de variable et le 1.*b.*, montrer que f est nulle.

B. Approximation de l'exponentielle

1. *a.* Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \mathrm{e}^{-n}\dfrac{n^n}{n!}\sqrt{n}$. À l'aide de la série de terme général :

$$v_n = \mathrm{Log}\, u_{n+1} - \mathrm{Log}\, u_n,$$

montrer que la suite (u_n) converge.

b. Montrer que, pour tout x dans $\mathbf{R}^+$:
$$\left|\mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

c. Prouver que la suite de fonctions ϕ_n définie sur $\mathbf{R}^+$ par : $\phi_n(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^k}{k!}\right)$

converge uniformément vers 0.

2. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-px}$ est limite uniforme sur $\mathbf{R}^+$ d'une suite de fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, avec P_n dans $\mathscr{P}_{\mathbf{R}}$.

Indication : raisonner par récurrence sur p, en remplaçant x par $\dfrac{px}{2}$ dans le résultat de B.1., et utiliser l'hypothèse de récurrence appliquée à $x \mapsto \mathrm{e}^{-(p-1)\frac{x}{2}}$.

3. On note, ici et dans la suite, $\mathscr{C}_0^+$ l'algèbre des fonctions continues de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$, munie de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbf{R}^+$.

a. Prouver que l'espace vectoriel engendré par les fonctions définies sur $\mathbf{R}^+$ par $x \mapsto \mathrm{e}^{-px}$, où p décrit $\mathbf{N}^*$, est dense dans $\mathscr{C}_0^+$.

b. Montrer que l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbf{R}^+$ par $x \mapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, où P décrit $\mathscr{P}_{\mathbf{R}}$, est dense dans $\mathscr{C}_0^+$.

II. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES ESPACES PONDÉRÉS

Dans toute la suite du problème $\mathscr{C}_0$ désigne l'algèbre des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ tendant vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On appelle **semi-norme** sur E toute application p de E dans $\mathbf{R}^+$ telle que :

1° Pour tout x de E et tout λ de $\mathbf{C}$, $p(\lambda x) = |\lambda|\,p(x)$;

2° Pour tout couple (x, y) de E^2, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

La topologie T de E associée à une semi-norme p est alors définie de la façon suivante :

- si le point x est dans E et le nombre ε dans $]0, +\infty[$, la boule ouverte de centre x et de rayon ε pour p est l'ensemble $\mathrm{B}_p(x, \varepsilon)$ des points y de E tels que $p(x-y) < \varepsilon$;
- une partie U de E est ouverte pour T si et seulement si, à tout point x de U, on peut associer un nombre réel ε strictement positif tel que la boule $\mathrm{B}_p(x, \varepsilon)$ soit incluse dans U.

Tournez la page S.V.P.

L'adhérence, intérieur, etc., d'une partie A de E pour T sont alors respectivement appelés adhérence, intérieur, etc. de A pour p. On utilisera en particulier le fait qu'un point x de E est dans l'adhérence d'une partie A pour la semi-norme p si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de A telle que la suite réelle $(p(x - a_n))$ tende vers 0.

Lorsque ω est un poids, on note $\mathscr{A}_\omega$ l'espace vectoriel des applications continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que l'application $f\omega$: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\quad x \mapsto f(x)\omega(x)$ tende vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Si f est dans $\mathscr{A}_\omega$, on note $\|f\|_\omega$ le réel $\|f\omega\|_\infty$; $\|\ \|_\omega$ définit alors une semi-norme sur $\mathscr{A}_\omega$. Lorsque X est inclus dans $\mathscr{A}_\omega$, $\overline{\mathrm{X}}^\omega$ désigne l'adhérence de X pour $\|\ \|_\omega$.

Nous dirons, ici et dans toute la suite, que le poids ω est **à décroissance rapide** si $\mathscr{P}_\mathrm{C}$ est contenu dans $\mathscr{A}_\omega$, et que ω est **fondamental** si de plus $\mathscr{P}_\mathrm{C}$ est dense dans $\mathscr{A}_\omega$ pour $\|\ \|_\omega$.

A. Généralités

On considère dans ce qui suit un poids ω et un élément z de $\mathbf{D}$.

1. Montrer que $\|\ \|_\omega$ est une norme sur $\mathscr{A}_\omega$ si et seulement si l'ensemble $\mathrm{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid \omega(x) = 0\}$ des zéros de ω est d'intérieur vide.

2. Soit g une fonction continue bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, φ l'application de $\mathscr{A}_\omega$ dans $\mathscr{A}_\omega$ définie par $f \to gf$, et X une partie de $\mathscr{A}_\omega$. Prouver que $\varphi(\overline{\mathrm{X}}^\omega)$ est contenue dans $\overline{\varphi(\mathrm{X})}^\omega$.

3. *a.* Montrer que l'algèbre $\mathscr{K}$ des fonctions continues à support compact de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathscr{A}_\omega$ pour $\|\ \|_\omega$.

   b. On suppose le poids ω borné, ce qui entraîne que $\mathscr{C}_0$ est contenue dans $\mathscr{A}_\omega$.
   Montrer que $\mathscr{H}_z$ est dense dans $\mathscr{A}_\omega$ pour la semi-norme $\|\ \|_\omega$.

4. Montrer que, pour tout poids ω, on a l'équivalence :
   ω est à décroissance rapide $\iff$ pour tout P de $\mathscr{P}_\mathrm{C}$, ωP est une fonction bornée sur $\mathbf{R}$.

5. Soit (a, b) dans $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$, et soit α l'application définie sur $\mathbf{R}$ par $\alpha(t) = at + b$. Montrer que ω est à décroissance rapide (resp. est fondamental) si et seulement si $\omega \circ \alpha$ est à décroissance rapide (resp. est fondamental).

6. Soient ω et ν deux poids, avec $\omega \leqslant \nu$.

   a. Montrer que $\mathscr{A}_\nu$ est dense dans $\mathscr{A}_\omega$ pour la semi-norme $\|\ \|_\omega$.

   b. En déduire que, si ν est fondamental, ω aussi.

B. Exemples

1. Soit ω un poids à support compact. Montrer que ω est fondamental.

2. À l'aide de II.A.5. et de la partie I.A., montrer que les poids $\alpha_c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $\quad x \mapsto \exp(-c|x|^{\frac{1}{4}})$, avec c dans $]0, +\infty[$, ne sont pas fondamentaux.

3. On considère cette fois les poids $\omega_c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $\quad x \mapsto \exp(-cx^2)$, avec c dans $]0, +\infty[$.

   a. Soit f une fonction paire de $\mathscr{C}_0$ (définie au début du II.). En utilisant I.B. montrer que, pour tout nombre ε strictement positif, on peut trouver Q dans $\mathscr{P}_\mathrm{C}$ tel que :
   $$\|f(x) - \mathrm{Q}(x)\exp(-x^2)\|_\infty < \varepsilon .$$

   b. Soit f une fonction impaire de $\mathscr{C}_0$; montrer que, pour tout nombre ε strictement positif, on peut trouver S dans $\mathscr{P}_\mathrm{C}$ tel que :
   $$\|f(x) - \mathrm{S}(x)\exp(-x^2)\|_\infty < \varepsilon$$
   (commencer par le cas où f est à support compact et identiquement nulle sur un voisinage de 0).

   c. Prouver que les poids ω_c sont fondamentaux.

A SUIVRE

III. UNE CARACTÉRISATION DES POIDS FONDAMENTAUX

Lorsque ω est un poids, on désigne par ω^* le poids : $t \mapsto \dfrac{\omega(t)}{1+|t|}$;

on note $\mathscr{P}_\omega$ l'ensemble des polynômes P de $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ tels que P appartienne à $\mathscr{A}_\omega$ et $\|P\omega\|_\infty \leqslant 1$; enfin, si z est dans D, on introduit la borne supérieure $M_\omega(z)$ dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble $\{|P(z)| \mid P \in \mathscr{P}_\omega\}$.

On se propose de montrer que ω est fondamental si et seulement si, pour tout z de D : $M_{\omega^*}(z) = +\infty$. Dans toute la partie III, on fixe un nombre complexe z dans D.

1. On suppose ici que le poids ω est fondamental, et l'on se donne un nombre ε strictement positif.

   a. Montrer qu'il existe P dans $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ tel que $\|g_z - P\|_\omega \leqslant \varepsilon$.

   b. Soit $K = \inf_{t\in\mathbf{R}}[(1+|t|)|g_z(t)|]$, montrer que K est strictement positif.

   c. En considérant $Q(t) = \dfrac{K}{\varepsilon}[1-(t-z)P(t)]$, montrer que $M_{\omega^*}(z) = +\infty$.

2. Soit ν un poids tel que $M_\nu(z) = +\infty$. Le but de cette question est de prouver que ν est à décroissance rapide. On note W l'espace vectoriel $\mathscr{P}_{\mathbf{C}} \cap \mathscr{A}_\nu$.

   a. Si W est de dimension infinie, montrer que $W = \mathscr{P}_{\mathbf{C}}$.

   b. On suppose W de dimension finie. Prouver que la restriction de $\| \ \|_\nu$ à W est une norme, puis que $\mathscr{P}_\nu$ est compact et aboutir à une contradiction.

3. On suppose dans cette question que le poids ν est à décroissance rapide, et que $g_z \in \overline{\mathscr{P}_{\mathbf{C}}}^{\nu}$.

   a. Montrer que $g_z.\mathscr{P}_{\mathbf{C}} = \{g_z P \mid P \in \mathscr{P}_{\mathbf{C}}\}$ est inclus dans $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{C}}}^{\nu}$. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $(g_z)^n.\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ est inclus dans $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{C}}}^{\nu}$.

   b. Prouver que $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}$ est dense dans $\mathscr{A}_\nu$ pour la semi-norme $\| \ \|_\nu$. (On pourra utiliser II.A.3.).

4. Dans cette question, ω est un poids tel que $M_{\omega^*}(z) = +\infty$.

   a. Montrer que ω est à décroissance rapide.

   b. Montrer que ω est fondamental.

IV. UNE CARACTÉRISATION DES CLASSES QUASI-ANALYTIQUES

Soit $M = (M_n)$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs, telle que $M_0 = 1$ et que la suite $\left(\dfrac{M_n}{M_{n+1}}\right)$ soit décroissante. On note C(M) l'espace vectoriel des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telles qu'il existe des constantes réelles C et c strictement positives vérifiant, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x $|f^{(n)}(x)| \leqslant C.c^n M_n$.

On dit que la suite M définit une classe quasi-analytique si toute fonction f de C(M) vérifiant :

« il existe un nombre réel a tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout entier n »

est identiquement nulle.

On notera γ_M l'application qui au nombre réel t non nul associe $\gamma_M(t) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{M_n}{|t|^n}$,

et qui prend la valeur 1 en 0.

A

1. Montrer que γ_M est un poids sur **R**, et que γ_M est à décroissance rapide.
2. *a.* Soit (u_n) une suite réelle, convergente et de limite a. Montrer que la suite $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n)$ converge vers a. Prouver un résultat analogue lorsque u_n tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

b. Montrer que la suite $(M_n^{1/n})$ converge dans **R** ou tend vers $+\infty$. On note m sa limite.

3. *a.* Si $m < +\infty$, prouver que γ_M est à support compact.

b. Si $m = +\infty$, montrer que γ_M est une fonction continue qui ne s'annule pas.

B

Le but de cette partie est d'établir que, si **le poids γ_M est fondamental, la classe C(M) est quasi-analytique.**

Pour ce faire on raisonne par l'absurde en supposant que γ_M est fondamental et qu'il existe une fonction non identiquement nulle f dans C(M) telle que : $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, cas auquel on peut se ramener en remplaçant au besoin $f(x)$ par $f(x+a)$.

Pour z dans $U = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, on pose $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,dt$ (justifier).

1. *a.* Montrer que F est holomorphe sur U et calculer $z^n F(z)$ en fonction de $f^{(n)}$, dérivée d'ordre n de f.

   b. Montrer qu'il existe deux constantes C et c strictement positives telles que, pour tout z de U et tout entier naturel n:
$$|F(z)| \leqslant C.c^n M_n \frac{1}{\mathrm{Re}(z).|z|^n}.$$

2. Justifier l'existence d'un nombre réel $\alpha > 1$ tel que $F(\alpha) \neq 0$ (exploiter le résultat de I.A.2.).

3. On introduit le poids $\omega(t) = (1+|t|)|F(1+it)\|1+it|^{-1}$, et l'on se donne avec les notations de III., un élément P dans $\mathscr{P}_{\omega^*}$, enfin $G(z) = P(i-iz)F(z)z^{-1}$ pour z dans U.

   a. Montrer que $|G|$ est majoré par 1 sur $V = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 1\}$.

   b. En déduire que ω n'est pas fondamental.

   c. Établir, pour tout t réel : $\omega(t) \leqslant \sqrt{2}\, C\gamma_M\left(\frac{t}{c}\right)$. Conclure.

C

On utilisera librement la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach :
Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé E tel que toute forme linéaire continue ϕ sur E s'annulant sur F est identiquement nulle, F est dense dans E.

L'objet de cette dernière partie est de montrer la réciproque de la propriété précédente, à savoir :

si la classe C(M) est quasi-analytique, le poids $\gamma = \gamma_M$ est fondamental.

On suppose donc C(M) quasi-analytique, et l'on écarte le cas déjà traité où γ est à support compact. Lorsque a est dans **R** et m dans **N**, on note e_a la fonction de **R** dans **C** qui à t associe e^{ita}, et u_m la fonction $u_m(t) = (it)^m$. ϕ désigne une forme linéaire continue de $(\mathscr{A}_\gamma, \|\ \|_\gamma)$ dans **R**, et f la fonction de **R** dans **C** définie par $f(a) = \phi(e_a)$ pour tout a réel.

1. Montrer que f est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et que l'on a $f^{(m)}(a) = \phi(e_a u_m)$. En déduire l'appartenance de f à C(M).

2. On suppose désormais que ϕ s'annule identiquement sur $\mathscr{P}_C$. Montrer que $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout entier m, puis que $f = 0$.

3. Prouver que l'espace vectoriel engendré par les fonctions e_a est dense dans A_γ (pour $\|\ \|_\gamma$), et en déduire que :

C(M) est quasi-analytique $\Longleftrightarrow$ γ_M est fondamental.

Application :

En considérant la suite $M_n = n!$, montrer que les poids $\omega(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$, $\alpha > 0$ et $c > 0$, sont fondamentaux dès que α est supérieur ou égal à 1. Qu'advient-il pour $\alpha < 1$?

FIN