SESSION DE 1989 **COMPOSITION D'ANALYSE** DURÉE : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.

PRÉAMBULE

On rappelle les deux propriétés suivantes, qui pourront être utilisées sans démonstration :

1. Si Ω est un ouvert de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et (f_n) une suite d'applications holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$, convergeant vers une application f de Ω dans $\mathbb{C}$, uniformément sur tout compact inclus dans Ω, alors l'application f est holomorphe dans Ω.

2. Si $(u_{p,q})$, $((p,q) \in \mathbb{N}^2)$, est une suite double de nombres complexes telle que $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|\right)$ est fini, alors les deux sommes $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ et $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$ sont définies et égales.

On rappelle aussi la définition de la limite supérieure d'une suite (u_n) de nombres réels :

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n) = \lim_{n\to\infty} (\sup\{u_k \mid k \geqslant n\}) \qquad (\text{élément de } \overline{\mathbb{R}}).$$

On signale que $\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x.

Avertissement. Les informations placées entre ■ ... ■ concernent la totalité du problème ou tout un groupe de questions.

■ On appelle série de Dirichlet, toute série de fonctions de la variable complexe z de la forme $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$, où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite complexe quelconque, et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante et non majorée. ■

I. ABSCISSE DE CONVERGENCE

Cette première partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés générales de convergence, illustrées par divers exemples et contre-exemples.

I.1.*a.* Déterminer pour chacune des deux séries : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$

d'une part la borne inférieure σ_c de l'ensemble des réels x pour lesquels la série converge, d'autre part la borne inférieure σ_a de l'ensemble des réels x pour lesquels elle converge absolument.

■ De façon générale, pour une série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ on définit l'abscisse de convergence σ_c et l'abscisse de convergence absolue σ_a :

$$\sigma_c = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge}\}, \quad \sigma_a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geqslant 1} |a_n| e^{-\lambda_n x} \text{ converge}\}$$

σ_c et σ_a étant définis dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec les conventions habituelles. ■

b. Dans cette question I.1.*b.* seulement, on envisage le cas particulier $\lambda_n = \ln(n)$, c'est-à-dire $a_n \cdot e^{-\lambda_n z} = \frac{a_n}{n^z}$.

Montrer dans ce cas l'inégalité $\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1$, et donner un exemple pour chacun des deux cas extrêmes $\sigma_a = \sigma_c$ et $\sigma_a = \sigma_c + 1$.

■ Pour φ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et x_0 réel, on désignera par $Sx_0(\varphi)$ l'ensemble des nombres complexes z de la forme $x_0 + r \cdot e^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $|\theta| \leqslant \varphi$. ■

Tournez la page S. V. P.

I.2. Soit f une application continue de $[0\,,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour un x_0 réel donné, l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-tx_0}\,dt$ est convergente. On fixe φ dans $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer, en introduisant une fonction $F_A(t)=\int_A^t f(u)\cdot e^{-ux_0}\,du$, et en utilisant une intégration par parties, que lorsque B tend vers l'infini, $\int_0^B f(t)\cdot e^{-tz}\,dt$ converge uniformément par rapport à z dans l'ensemble $Sx_0(\varphi)$.

■ Pour les questions I.3. et I.4., on définit une application μ de variable réelle t par :

$$\mu(t)=t \quad \text{pour } t \text{ dans } [0,1[\,;$$
$$\mu(t)=2-t \quad \text{pour } t \text{ dans } [1,2]\,;$$
$$\mu(t)=0 \quad \text{pour } t \text{ dans }]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[. \quad ■$$

I.3. On fixe x_0 réel et φ dans $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$. On suppose donné λ dans $]0\,,+\infty[$.

Montrer qu'à tout réel $\varepsilon>0$, on peut associer un réel $\alpha>0$ tel que l'inégalité $|e^{-\lambda z}-e^{-tz}|\leqslant\varepsilon$ soit vérifiée pour tous z dans $Sx_0(\varphi)$ et t dans $[\lambda\,,\lambda+2\alpha]$.

En déduire : $\left|e^{-\lambda z}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\cdot\mu\left(\frac{t-\lambda}{\alpha}\right)\cdot e^{-tz}\,dt\right|\leqslant\varepsilon$ pour z dans $Sx_0(\varphi)$.

I.4. On conserve x_0 et φ comme au I.3. Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet.

Construire une fonction f continue sur $[0\,,+\infty[$ de la forme :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\alpha_n}\cdot\mu\left(\frac{t-\lambda_n}{\alpha_n}\right) \qquad \text{avec} \qquad 0<\alpha_n\leqslant\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}$$

de façon que la série de fonctions de terme général :

$$u_n(z)=\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(t)\cdot e^{-tz}\,dt-a_n e^{-\lambda_n z}$$

soit normalement convergente dans $Sx_0(\varphi)$.

En déduire que si la série de Dirichlet converge en x_0, elle converge uniformément dans $Sx_0(\varphi)$.

Montrer qu'elle converge alors dans le demi-plan : $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c$.

■ La question I.5. généralise l'étude du I.1.*b*. Elle n'est pas utilisée dans la suite du problème. ■

I.5. Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c finie.

a. Dans cette question I.5.*a*., on suppose qu'il existe un réel $k>0$ et un entier n_0 tels que $\lambda_n\geqslant k\cdot\ln(n)$ pour tout entier $n\geqslant n_0$.

Démontrer que si la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge pour un x réel, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$ converge absolument pour tout x' de la forme $x'=x+\frac{1+\alpha}{k}$, où α est un réel donné strictement positif.

b. Démontrer que si b désigne $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\lambda_n}\right)$, alors $\sigma_c\leqslant\sigma_a\leqslant\sigma_c+b$.

c. En déterminant l'abscisse de convergence σ_c et l'abscisse de convergence absolue σ_a pour chacune des deux séries :

$$\sum_{n\geqslant 3}\frac{(-1)^n}{n}e^{-z\sqrt{\ln(\ln(n))}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 3}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}e^{-z\ln(n)},$$

démontrer qu'est possible chacune des deux situations suivantes :

i. $\sigma_c=-\infty$ et $\sigma_a=+\infty$.

ii. $-\infty<\sigma_c<\sigma_a<\sigma_c+b<+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

II. Théorème de Cramer

Le but de cette deuxième partie est d'établir quelques résultats utilisés dans la suite.

■ Dans toute la partie II, (c_n), $n \in \mathbb{N}$, est une suite complexe et k un réel strictement positif. On suppose que :

i. La série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ a un rayon de convergence infini ;

ii. Sa somme $\Phi(z)$ vérifie :
pour tout $k_1 > k$, il existe A tel que $|z| > A$ implique $|\Phi(z)| < e^{k_1 z}$ ■

II.1. Lemme de Lindelöf :

a. On pose $m(r) = \sup_{|z| = r} (|\Phi(z)|)$, pour tout $r \geq 0$. Montrer, en utilisant au besoin la fonction périodique $t \mapsto \Phi(r \cdot e^{it})$, que $|c_n| r^n \leq m(r)$ pour tout n.

b. Pour $\alpha > 0$ et n entier > 0, trouver le minimum de la fonction $r \mapsto r^{-n} \cdot e^{\alpha r}$, quand r décrit $]0, +\infty[$.
Soit $k_2 > k$; démontrer, en posant par exemple $\alpha = \dfrac{k_2 + k}{2}$, que $|c_n| \leq \dfrac{k_2^n}{n!}$ dès que l'entier n est assez grand.
(On pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$, quand $n \to \infty$.)

■ Dans la suite du II, on considère une série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ d'abscisse de convergence $\sigma_c < +\infty$ et, pour $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, on désigne par $f(z)$ sa somme. ■

II.2. Dans cette question II.2. seulement, on suppose de plus que cette série de Dirichlet a une abscisse de convergence absolue σ_a finie.
Montrer qu'alors la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} \Phi(\lambda_n) \cdot a_n \cdot e^{-\lambda_n z}$ a une abscisse de convergence absolue σ'_a telle que $\sigma'_a \leq \sigma_a + k$ (théorème de Cramer, 1918).

II.3. Montrer que la série $\sum_{m \geq 0} \dfrac{m!\, c_m}{z^{m+1}}$ définit pour $|z| > k$ une fonction holomorphe H et que pour R $> k$ et s complexe, on a :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = R} e^{sz} \cdot H(z)\, dz,$$

le cercle $|z| = R$ étant parcouru une fois dans le sens positif.

En déduire que l'abscisse de convergence σ'_c de la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} \Phi(\lambda_n) \cdot a_n \cdot e^{-\lambda_n z}$ vérifie $\sigma'_c \leq \sigma_c + k$, et que sa somme F est donnée pour $R > k$ et $\operatorname{Re}(s) > \sigma_c + R$, par la relation :

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = R} f(s - z) \cdot H(z)\, dz.$$

III. Ordre d'une série dans le plan et dans une bande

■ Pour une série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ dont la somme est notée $f(z)$ et qui converge absolument quand z prend la valeur réelle σ, on pose :

$$M(\sigma) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(\sigma + it)| \quad ■$$

III.1. *a.* Montrer que sous les hypothèses ci-dessus,

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(\sigma + it) \cdot e^{i\lambda_n t}\, dt \right)$$

et en déduire, pour $n \geq 1$, les inégalités $|a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq M(\sigma)$.

Tournez la page S. V. P.

■ À partir de ce point, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ est la somme d'une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a = -\infty$.

Notant $\ln^+$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\ln^+(x)$ vaut $\ln(x)$ pour $x \geqslant 1$ et vaut 0 pour les autres valeurs de x, on pose pour $\sigma < 0$:

$$\theta(\sigma) = \sup_{\sigma_1 \leqslant \sigma} \left(\frac{\ln^+(\ln^+(M(\sigma_1)))}{-\sigma_1} \right)$$

et on définit l'ordre Γ de f par $\Gamma = \lim_{\sigma \to -\infty} \theta(\sigma)$ (limite qui peut valoir $+\infty$). ■

b. Montrer que sous l'hypothèse présente $(\sigma_a = -\infty)$ cette définition de l'ordre a toujours un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$ et, à titre d'exemple, calculer Γ pour $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n!}$.

III.2. Dans cette question, on suppose de plus qu'il existe $G_0 > 0$ tel que $\lambda_n \geqslant nG_0$ pour tout $n \geqslant 1$.

a. Pour $\delta > 0$ fixé, montrer qu'il existe $B > 0$ tel que $\sigma < -B$ implique :

$$\ln(|a_n|) \leqslant e^{-(\Gamma+\delta)\sigma} + \lambda_n \sigma .$$

De l'étude du minimum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{-(\Gamma+\delta)x} + \lambda_n x$, déduire que :

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{\ln(|a_n|)}{\lambda_n \ln(\lambda_n)} \right) \leqslant -\frac{1}{\Gamma} .$$

b. Soit $\Gamma_1 > 0$ tel que pour n assez grand on ait $\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln(\lambda_n)} < -\frac{1}{\Gamma_1}$, et $\delta_1 > 0$. On pose $a = \frac{\delta_1}{\Gamma_1(\Gamma_1 + \delta_1)}$.

Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} e^{-naG_0 \ln(nG_0)}$ est convergente et en déduire qu'on peut trouver $C > 0$ tel que pour tout $\sigma < 0$:

$$M(\sigma) \leqslant C \cdot \operatorname{Sup}_{n \geqslant 1} \left(\exp\left(-\frac{\lambda_n \ln(\lambda_n)}{\Gamma_1 + \delta_1} - \lambda_n \sigma \right) \right).$$

c. Démontrer que : $-\frac{1}{\Gamma} = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{\ln(|a_n|)}{\lambda_n \ln(\lambda_n)} \right)$,

avec les conventions évidentes $-\frac{1}{0} = -\infty$, $-\frac{1}{\infty} = 0$.

$\left(\text{On pourra pour cela majorer la fonction } x \mapsto -\frac{x\ln(x)}{\Gamma_1 + \delta_1} - \sigma x.\right)$

■ Dans toute la question III.3., on pourra utiliser sans les redémontrer les relations :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}(\pi r)}{\pi r} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r}. \quad ■$$

III.3. Soit un réel $G_1 > 0$ et $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ une suite strictement croissante de réels telle que $\mu_n \geqslant nG_1$ pour tout n.

On pose, pour tout $j \geqslant 1$, $g_j(z) = z \cdot \prod_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \neq j}} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$.

Tournez la page S. V. P.

a. Montrer que les fonctions g_j sont analytiques dans $\mathbf{C}$.

Écrivant alors $g_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1}^{(j)} z^{2m+1}$ (puisque g_j est impaire), montrer qu'à tout $\delta > 0$ on peut associer A tel que l'on ait, pour $j > 0$ et $m \geqslant 0$, les inégalités :

$$|C_{2m+1}^{(j)}| \leqslant A \cdot \left(\frac{\pi(1+\delta)}{G_1}\right)^{2m+1} \cdot \frac{1}{(2m+1)!}.$$

(On pourra utiliser le II.1.)

b. On suppose que, de plus, la suite (μ_n) vérifie les conditions :
pour tout $n \geqslant 1$, $nG_1 \leqslant \mu_n \leqslant (n+1)\,G_1$, $\mu_{n+1} - \mu_n \geqslant \frac{G_1}{2}$.

Déterminer un minorant $m > 0$ de $\frac{\sin(\pi\theta)}{\theta(1-\theta)}$ quand θ décrit $]0, 1[$.

Déterminer un minorant $k > 0$ de $\mu_j^2 |g_j(\mu_j)|$, valable pour tout entier $j \geqslant 2$.
(On pourra commencer par le cas $\mu_j = (j+\theta)\,G_1$, avec θ dans l'intervalle $]0, 1[$ et dépendant de j.)

III.4. On suppose qu'il existe $G > 0$ tel que la série de Dirichlet introduite au début de cette partie III vérifie :

$$\liminf_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \geqslant G.$$

a. Soit $\delta > 0$ et $G_1 = \frac{G}{1+\delta}$; montrer qu'il existe une suite $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$, ayant les propriétés requises à la question III.3.*b.* (1er alinéa), telle qu'à partir d'un certain rang n_0 la suite (λ_n) soit extraite de la suite (μ_n).

b. On pose alors $h(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ et $R = \frac{\pi(1+2\delta)^2}{G}$.

Montrer, en introduisant les fonctions $F_j(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n g_j(\lambda_n) e^{-\lambda_n z}$, et en utilisant, par exemple, une expression sous forme d'intégrale analogue à celle du II.3., qu'il existe $B > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, et tout nombre complexe s on ait $\sup_{|z| = R} (|h(s+z)|) \geqslant B \cdot \frac{|a_n|}{\lambda_n^2} \cdot e^{-\lambda_n \mathrm{Re}(s)}$.

III.5. En déduire que, si on définit un ordre Γ_T en limitant $\sigma + it$ à la bande horizontale $T = \{\sigma + it \mid |t - t_0| < R\}$, ($t_0$ et R fixés), sous les hypothèses de la question III.4., on a $\Gamma_T = \Gamma$ dès que $R > \frac{\pi}{G}$.

Ainsi l'ordre dans une bande horizontale de largeur suffisante est égal à l'ordre dans le plan tout entier : c'est un résultat dû à S. Mandelbrojt (1944).

À titre d'exemple, pour $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n!}$, déjà étudié au III.1.*b.*, déterminer une bande horizontale de largeur $\frac{\pi}{G}$ (c'est-à-dire la moitié de la valeur spécifiée dans l'énoncé ci-dessus) où l'ordre est strictement inférieur à l'ordre dans tout le plan.

• FIN •