

Composition d'analyse.

6203. Les résultats utilisés devront être énoncés avec précision. La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les définitions et les notations introduites dans la partie I servent tout au long du problème.

Les parties II et III sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}$  (Resp.  $\mathbb{C}$ ) le corps des réels (Resp. complexes). Il est supposé muni de la distance associée à la valeur absolue (Resp. le module).

Pour tout nombre complexe  $z$ , on note respectivement  $\operatorname{Re} z$  et  $\operatorname{Im} z$  ses parties réelle et imaginaire, et  $\bar{z}$  son conjugué.

On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0)\}, \\ \mathbb{R}_- & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0)\}, \\ \mathbb{R}^* & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0)\}, \\ \mathbb{R}_+^* & \text{ l'ensemble } \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*, \\ \mathbb{R}_-^* & \text{ l'ensemble } \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Tout espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments.

On note

$E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

$E_0$  le sous-espace de  $E$  formé par les applications constantes.

$E_1$  le sous-espace de  $E$  formé par les applications nulles en chaque point de  $\mathbb{R}_-$ .

$E_2$  le sous-espace de  $E$  formé par les applications nulles en chaque point de  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout espace vectoriel  $V$ ,  $1_V$  désigne l'application identique de  $V$ .

PREMIÈRE PARTIE.

1° Démontrer que  $E$  est somme directe de  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$ .

Pour  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , deux à deux distincts, éléments de  $\{0, 1, 2\}$ , on note  $p_\alpha : E \rightarrow E$  l'endomorphisme de projection sur  $E_\alpha$  parallèlement à  $E_\beta \oplus E_\gamma$ .

2° A tout élément  $f$  de  $E$ , on associe l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad g(0) = f(0).$$

Démontrer que  $g$  appartient à  $E$ .

3° On note  $\Phi$  le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $E$ , qui a  $f$  associe  $g$ .

$\Phi$  est-il injectif ?  $\Phi$  est-il surjectif ?

Un sous-espace  $F$  de  $E$  est dit stable par  $\Phi$  si, et seulement si,  $\Phi(F) \subset F$ ; dans ce cas, l'application de  $F$  dans  $F$ , induite par  $\Phi$ , est un endomorphisme de  $F$ .

4° Démontrer que, pour tout élément  $\alpha$  de  $\{0, 1, 2\}$ ,  $E_\alpha$  est stable par  $\Phi$  et que  $p_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ p_\alpha$ ; on note alors  $\Phi_\alpha$  l'endomorphisme de  $E_\alpha$  induit par  $\Phi$ .

DEUXIÈME PARTIE.

1° Soit  $\lambda$  un nombre complexe non nul.

Déterminer toutes les applications dérivables  $f$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0.$$

2° Déterminer avec soin l'ensemble  $S$  des valeurs propres de  $\Phi_1$  (cf. I, 4°), puis l'ensemble  $T$  des valeurs propres de  $\Phi$ . Représenter graphiquement, dans le plan complexe, les ensembles  $S$  et  $T$ ; on en précisera les points non intérieurs.

3° Pour tout  $\lambda$  dans  $S$  (Resp.  $T$ ), on note  $E_1^\lambda$  (Resp.  $E^\lambda$ ) le sous-espace propre de  $\Phi_1$  (Resp.  $\Phi$ ) associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Pour tout  $\lambda$  dans  $S$  déterminer une base de  $E_1^\lambda$ .

Pour tout  $\lambda$  dans  $T$  déterminer une base de  $E^\lambda$ .

4° Pour tout  $\lambda$  dans  $S$  (Resp.  $T$ ), pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $F_1^\lambda(n)$  [Resp.  $F^\lambda(n)$ ] le sous-espace de  $E_1$  (Resp.  $E$ ) défini par

$$F_1^\lambda(n) = \operatorname{Ker} (\Phi_1 - \lambda 1_{E_1})^n \quad (\text{Resp. } F^\lambda(n) = \operatorname{Ker} (\Phi - \lambda 1_E)^n).$$

On pose  $F_1^\lambda = \bigcup_{n \geq 1} F_1^\lambda(n)$  et  $F^\lambda = \bigcup_{n \geq 1} F^\lambda(n)$ .

Pour tout  $\lambda$  dans  $S$ , déterminer une base de  $F_1^\lambda$ .

Pour tout  $\lambda$  dans  $T$ , déterminer une base de  $F^\lambda$ .

5° a) Soit  $\lambda$  un élément de  $S$ ; déterminer tous les sous-espaces de  $F_1^\lambda$  stables par  $\Phi_1$ .

En déduire une caractérisation de tous les sous-espaces de  $E_1$  de dimension finie, stables par  $\Phi_1$ .

b) Tout sous-espace  $H$  de  $E$ , de dimension finie, stable par  $\Phi$ , est-il somme directe d'un sous-espace  $H_1$  de  $E_1$  et d'un sous-espace  $H_2$  de  $E_2$  stables par  $\Phi$  ?

#### TROISIÈME PARTIE.

On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les sous-espaces vectoriels de  $E$  suivants :

$$A = \{f \mid f \in E \text{ et } (\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0) \text{ et } (\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0)\},$$

$$B = \{f \mid f \in E \text{ et } (f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R})\},$$

$$C = \left\{ f \mid f \in E \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

1° Déterminer toutes les inclusions concernant les ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$ . (On demande donc six démonstrations; chaque inclusion ou non-inclusion devant être justifiée.)

2° Comparer, toujours du point de vue de l'inclusion,  $A$  à  $B \rightarrow C$ .

3° Démontrer que, pour tout élément  $f$  de  $B$ , il existe un couple  $(a, b)$  de réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq a|x| + b.$$

4° Les ensembles  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A \cap C$  sont-ils stables par  $\Phi$  ? Justifier chaque réponse par une démonstration.

#### QUATRIÈME PARTIE.

On note  $D$  l'ensemble  $\left\{ f \mid f \in E \text{ et } \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right) \right\}$ .

1° a) Prouver que  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Comparer, du point de vue de l'inclusion,  $D$  à chacun des ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  (justifier chacune des six réponses).

2° Pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $D$ , on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Vérifier que la forme hermitienne  $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$  est définie positive.

Pour tout élément  $f$  de  $D$ , on pose  $\|f\| = \langle f | f \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

3° Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Soit  $f$  un élément de  $D$ , on pose  $g = \Phi(f)$ . Démontrer que

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \leq a|g(a)|^2 + 2 \left[ \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

4° Démontrer que  $D$  est stable par  $\Phi$ .

5° Démontrer que  $\forall f \in D, \|\Phi(f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle \Phi(f) | f \rangle$ .

6° On munit  $D$  de la norme  $\| \cdot \|$ . On note  $\Phi_D$  l'endomorphisme de  $D$  induit par  $\Phi$ .

a) Prouver que  $\Phi_D$  est continu et que, pour tout  $f$  dans  $D$ , on a  $\|\Phi_D(f)\| \leq 2\|f\|$ .

b) Démontrer que  $\operatorname{Sup} \{ \|\Phi_D(f)\| \mid f \in D \text{ et } (\|f\| = 1) \} = 2$ .

7° Démontrer le résultat plus précis suivant :  $(\forall f \in D) (f \neq 0 \Rightarrow \|\Phi_D(f)\| < 2\|f\|)$ .