

Composition d'analyse.

6203. Les résultats utilisés devront être énoncés avec précision. La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les définitions et les notations introduites dans la partie I servent tout au long du problème.

Les parties II et III sont indépendantes.

On note \mathbb{R} (Resp. \mathbb{C}) le corps des réels (Resp. complexes). Il est supposé muni de la distance associée à la valeur absolue (Resp. le module).

Pour tout nombre complexe z , on note respectivement $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ ses parties réelle et imaginaire, et \bar{z} son conjugué.

On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0)\}, \\ \mathbb{R}_- & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0)\}, \\ \mathbb{R}^* & \text{ l'ensemble } \{x | (x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0)\}, \\ \mathbb{R}_+^* & \text{ l'ensemble } \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*, \\ \mathbb{R}_-^* & \text{ l'ensemble } \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Tout espace vectoriel sur \mathbb{C} est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments.

On note

E le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

E_0 le sous-espace de E formé par les applications constantes.

E_1 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de \mathbb{R}_- .

E_2 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de \mathbb{R}_+ .

Pour tout espace vectoriel V , 1_V désigne l'application identique de V .

PREMIÈRE PARTIE.

1° Démontrer que E est somme directe de E_0 , E_1 et E_2 .

Pour α, β et γ , deux à deux distincts, éléments de $\{0, 1, 2\}$, on note $p_\alpha : E \rightarrow E$ l'endomorphisme de projection sur E_α parallèlement à $E_\beta \oplus E_\gamma$.

2° A tout élément f de E , on associe l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad g(0) = f(0).$$

Démontrer que g appartient à E .

3° On note Φ le \mathbb{C} -endomorphisme de E , qui a f associe g .

Φ est-il injectif ? Φ est-il surjectif ?

Un sous-espace F de E est dit stable par Φ si, et seulement si, $\Phi(F) \subset F$; dans ce cas, l'application de F dans F , induite par Φ , est un endomorphisme de F .

4° Démontrer que, pour tout élément α de $\{0, 1, 2\}$, E_α est stable par Φ et que $p_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ p_\alpha$; on note alors Φ_α l'endomorphisme de E_α induit par Φ .

DEUXIÈME PARTIE.

1° Soit λ un nombre complexe non nul.

Déterminer toutes les applications dérivables f de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{C} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0.$$

2° Déterminer avec soin l'ensemble S des valeurs propres de Φ_1 (cf. I, 4°), puis l'ensemble T des valeurs propres de Φ . Représenter graphiquement, dans le plan complexe, les ensembles S et T ; on en précisera les points non intérieurs.

3° Pour tout λ dans S (Resp. T), on note E_1^λ (Resp. E^λ) le sous-espace propre de Φ_1 (Resp. Φ) associé à la valeur propre λ .

Pour tout λ dans S déterminer une base de E_1^λ .

Pour tout λ dans T déterminer une base de E^λ .

4° Pour tout λ dans S (Resp. T), pour tout entier $n \geq 1$, on note $F_1^\lambda(n)$ [Resp. $F^\lambda(n)$] le sous-espace de E_1 (Resp. E) défini par

$$F_1^\lambda(n) = \operatorname{Ker} (\Phi_1 - \lambda 1_{E_1})^n \quad (\text{Resp. } F^\lambda(n) = \operatorname{Ker} (\Phi - \lambda 1_E)^n).$$

On pose $F_1^\lambda = \bigcup_{n \geq 1} F_1^\lambda(n)$ et $F^\lambda = \bigcup_{n \geq 1} F^\lambda(n)$.

Pour tout λ dans S , déterminer une base de F_1^λ .

Pour tout λ dans T , déterminer une base de F^λ .

5° a) Soit λ un élément de S ; déterminer tous les sous-espaces de F_1^λ stables par Φ_1 .

En déduire une caractérisation de tous les sous-espaces de E_1 de dimension finie, stables par Φ_1 .

b) Tout sous-espace H de E , de dimension finie, stable par Φ , est-il somme directe d'un sous-espace H_1 de E_1 et d'un sous-espace H_2 de E_2 stables par Φ ?

TROISIÈME PARTIE.

On note A , B et C les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$A = \{f \mid (f \in E) \text{ et } (\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0) \text{ et } (\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0)\},$$

$$B = \{f \mid (f \in E) \text{ et } (f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R})\},$$

$$C = \left\{ f \mid (f \in E) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

1° Déterminer toutes les inclusions concernant les ensembles A , B et C . (On demande donc six démonstrations; chaque inclusion ou non-inclusion devant être justifiée.)

2° Comparer, toujours du point de vue de l'inclusion, A à $B \rightarrow C$.

3° Démontrer que, pour tout élément f de B , il existe un couple (a, b) de réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq a|x| + b.$$

4° Les ensembles A , B , C , $A \cap C$ sont-ils stables par Φ ? Justifier chaque réponse par une démonstration.

QUATRIÈME PARTIE.

On note D l'ensemble $\left\{ f \mid (f \in E) \text{ et } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right) \right\}$.

1° a) Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E .

b) Comparer, du point de vue de l'inclusion, D à chacun des ensembles A , B et C (justifier chacune des six réponses).

2° Pour tout couple (f, g) d'éléments de D , on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Vérifier que la forme hermitienne $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est définie positive.

Pour tout élément f de D , on pose $\|f\| = \langle f | f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

3° Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f un élément de D , on pose $g = \Phi(f)$. Démontrer que

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \leq a|g(a)|^2 + 2 \left[\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

4° Démontrer que D est stable par Φ .

5° Démontrer que $\forall f \in D, \|\Phi(f)\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle \Phi(f) | f \rangle$.

6° On munit D de la norme $\| \cdot \|$. On note Φ_D l'endomorphisme de D induit par Φ .

a) Prouver que Φ_D est continu et que, pour tout f dans D , on a $\|\Phi_D(f)\| \leq 2\|f\|$.

b) Démontrer que $\operatorname{Sup} \{ \|\Phi_D(f)\| \mid (f \in D) \text{ et } (\|f\| = 1) \} = 2$.

7° Démontrer le résultat plus précis suivant : $(\forall f \in D) (f \neq 0 \Rightarrow \|\Phi_D(f)\| < 2\|f\|)$.