

R.L.I.

Note

Prog.
Sens

COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

PRÉAMBULE

On tient à préciser qu'aucune démonstration faisant intervenir une convergence, une continuité, une dérivabilité sous le signe \int , (Resp. \iint) ne sera prise en considération si les théorèmes invoqués ne sont pas énoncés avec précision au moins une fois dans la copie.

NOTATIONS

● On désigne respectivement par \mathbb{R} , $\overline{\mathbb{R}}$, \mathbb{C} le corps des réels, la droite réelle achevée, le corps des complexes. On identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} de sorte que si (x, y) est élément de \mathbb{R}^2 on pose :

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

● Dans tout le problème on considère un entier s ($s \geq 1$); pour tout élément z de \mathbb{C} et tout élément $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ de \mathbb{C}^s on pose :

$$P_s(z, \lambda) = z^s + \lambda_1 z^{s-1} + \dots + \lambda_s.$$

et $P'_s(z, \lambda) = s z^{s-1} + \lambda_1 (s-1) z^{s-2} + \dots + \lambda_{s-1}.$

Pour λ dans \mathbb{C}^s , on note (r_1, \dots, r_s) la suite des racines du polynôme $P_s(z, \lambda)$, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=s} (z - r_j);$$

on note $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ l'ensemble de ses racines distinctes, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=k} (z - z_j)^{s_j}$$

où l'entier s_j ($s_j \geq 1$) représente l'ordre de multiplicité de z_j .

● Soient p un entier ($p \geq 1$) et F une application de \mathbb{C}^p dans \mathbb{C} , on dit que F est de classe C^r si et seulement si F est r fois continûment différentiable en tant qu'application de \mathbb{R}^{2p} dans \mathbb{C} ; on dit que F est de classe C^∞ si et seulement si elle est de classe C^r pour tout r .

● Les opérateurs différentiels $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ sont notés respectivement $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Pour p et q entiers naturels on pose :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^p \circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^q.$$

DÉFINITIONS

Soit F une application de \mathbb{C}^p dans \mathbb{C} supposée de classe C^∞ ; soit a un point de \mathbb{C}^p , soit r un entier ($r \geq 0$); on dit que F est r -plate au point a si et seulement si F s'annule en a ainsi que toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre r inclus. On dit que F est plate en a si et seulement si, pour tout entier r , F est r -plate en a .

Soit X une partie de \mathbb{C}^p , on dit que F est r -plate (Resp. plate) sur X si et seulement si F est r -plate (Resp. plate) en chaque point de X .

Dans tout le problème f est une application de classe C^∞ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} et g une application de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

L'objet du problème est d'établir une identité de division de f , (Resp. g) par le polynôme $P_s(z, \lambda)$, (Resp. $P_s(x, \lambda)$) et d'étudier comment le quotient et le reste définis à cette occasion dépendent de λ .

On note Δ l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial \eta^\gamma}$

où $\partial \lambda^\alpha$ (Resp : $\partial \bar{\lambda}^\beta$) est mis pour

$$\partial \lambda_1^{\alpha_1} \dots \partial \lambda_s^{\alpha_s} \quad (\text{Resp : } \partial \bar{\lambda}_1^{\beta_1} \dots \partial \bar{\lambda}_s^{\beta_s})$$

R.I.I

Note

$$\text{En posant } Q(x, \eta, \lambda) = \left| \frac{P'_s(x + \eta i, \lambda)}{P_s(x + \eta i, \lambda)} \right|^2$$

démontrer que :

Prog
Sens

a. On a : pour tout (η, λ) dans Ω et tout x réel :

$$\Delta Q(x, \eta, \lambda) = \frac{A(x, \eta, \lambda)}{|P_s(x + \eta i, \lambda)|^{2p}}$$

où A est un polynôme en $x, \eta, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_s$ dont le degré en x est au plus $2ps - 2$.

b. L'application σ est de classe C^∞ sur Ω .

c. Pour tout compact K de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ et tout triplet (α, β, γ) , il existe un réel C_K tel que :

$$\forall (\eta, \lambda) \in \Omega \cap K \quad |\Delta \sigma(\eta, \lambda)| \leq C_K \left(1 + \frac{1}{\delta(\eta, \lambda)^{2ps}} \right)$$

DEUXIÈME PARTIE

Sauf au 4°, on a fixé λ dans \mathbb{C}^s et on écrit $P(z)$ au lieu de $P_s(z, \lambda)$.

1° a. Soit s_0 un entier ($s_0 \geq 1$); en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞ , notée Q_0 , de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et un unique polynôme R_0 de degré au plus $s_0 - 1$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = R_0(t) + t^{s_0} Q_0(t)$$

b. Démontrer qu'il existe une application de classe C^∞ notée Q , de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et un polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = P(t) Q(t) + R(t)$$

Démontrer que le couple (Q, R) est unique si et seulement si P a toutes ses racines réelles.

2° Soient m et n deux entiers ($m \geq 1, n \geq 1$), démontrer que l'application $w : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad w(z) = \frac{z^{n+m}}{z^n}$$

se prolonge de manière unique en une application $w_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{m-1} .

3° a. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle, démontrer l'égalité :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall h \in \mathbb{C}$$

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{1 \leq p+q \leq r} \frac{h^p \bar{h}^q}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z) +$$

$$(r+1) \sum_{p+q=r+1} \frac{h^p \bar{h}^q}{p! q!} E_{p,q}(z, h)$$

$$\text{où } E_{p,q}(z, h) = \int_0^1 (1-t)^r \frac{\partial^{r+1} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z+th) dt$$

b. On suppose l'application $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ plate sur l'ensemble Z des zéros de P .

Démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞ , notée Q , de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , et un unique polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = P(z) Q(z) + R(z)$$

c. Démontrer que si f est holomorphe, Q l'est aussi.

d. Démontrer que le résultat de b. subsiste si l'on suppose seulement que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est, pour tout j ($1 \leq j \leq k$) $(s_j - 1)$ -plate au point z_j .

4° Soit F une application de classe C^∞ , de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans \mathbb{C} ; on suppose F plate sur l'ensemble X des couples (z, λ) vérifiant $P_s(z, \lambda) = 0$.

Démontrer que pour tout entier naturel r ($r \geq 1$) l'application :

$$(z, \lambda) \mapsto \frac{F(z, \lambda)}{(P_s(z, \lambda))^r}$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \setminus X$ dans \mathbb{C} se prolonge de façon unique en une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans \mathbb{C} , de classe C^∞ .

Indication : on commencera par démontrer que l'application :

$$\Phi : (z, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \mapsto (z, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}, P_s(z, \lambda))$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans lui-même est un changement de variable C^∞ , c'est-à-dire une application bijective de classe C^∞ ainsi que sa réciproque.

TROISIÈME PARTIE

Pour tout réel ξ on note : $I(\xi) = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{1 + |\xi|}, \frac{1}{1 + |\xi|} \right]$

et A la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ formée par les triplets (ξ, λ, y) tels que y appartienne à $I(\xi)$.

On note ρ_0 une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$, de classe C^∞ sur \mathbb{R} , paire, et vérifiant :

$$\forall t \in [8s^3, +\infty] \quad \rho_0(t) = 0$$

$$\forall t \in [0, 4s^3] \quad \rho_0(t) = 1$$

L'existence de ρ_0 est admise.

1° a. Démontrer que l'application :

$$(\xi, \lambda, \eta) \mapsto \rho_0 \left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|} \right)$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est de classe C^∞ en (λ, η) et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, η) .

b. Soit Ψ l'application de A dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in A \quad \Psi(\xi, \lambda, y) = 4(1 + |\xi|) \int_y^{\frac{1}{1 + |\xi|}} \rho_0 \left(\frac{\sigma(\eta, \lambda)}{1 + |\xi|} \right) d\eta.$$

Démontrer que pour tout λ dans \mathbb{C}^s et tout réel ξ on a :

$$\Psi \left(\xi, \lambda, \frac{1}{2(1 + |\xi|)} \right) \geq 1.$$

Prouver que Ψ est continue, qu'elle est de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{A}$ en (λ, y) , et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, y) sur $\overset{\circ}{A}$.

2° Soit α un réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; soit ρ_1 une application de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1]$ de classe C^∞ , vérifiant :

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad \rho_1(t) = 0$$

$$\forall t \in [1 - \alpha, +\infty[\quad \rho_1(t) = 1$$

L'existence de ρ_1 est admise.

On note ρ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$(\xi, \lambda, y) \mapsto \rho(\xi, \lambda, y) \text{ avec :}$$

i. ρ est paire en y

ii. si $0 \leq y < \frac{1}{2(1 + |\xi|)}$ $\rho(\xi, \lambda, y) = 1$

iii. si $y \in I(\xi)$ $\rho(\xi, \lambda, y) = \rho_1(\Psi(\xi, \lambda, y))$

iv. si $y > \frac{1}{1 + |\xi|}$ $\rho(\xi, \lambda, y) = 0$

a. Prouver que ρ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$, de classe C^∞ par rapport à (λ, y) , chacune de ses différentielles étant continue par rapport à (ξ, λ, y) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$.

b. Prouver l'existence d'un ouvert contenant $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \{0\}$ sur lequel ρ est constante égale à 1.

Prouver que $\rho(\xi, \lambda, y)$ est nul dès que $|y \xi| \geq 1$.

c. Démontrer l'existence d'un ouvert contenant l'ensemble :

$$\{(\xi, \lambda, y) \mid \xi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}^s, y \in \mathbb{R} \text{ et } (y, \lambda) \notin \Omega\}$$

sur lequel $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ est nulle.

d. Démontrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ et tout triplet (α, β, γ) de $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}$, il existe un réel D_K et un entier naturel q tels que :

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times K \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+\gamma} \rho}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial y^\gamma} (\xi, \lambda, y) \right| \leq D_K (1 + |\xi|^q)$$

QUATRIÈME PARTIE

On suppose dans cette partie que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^∞ et est intégrable sur \mathbb{R} .

On admet l'existence d'une fonction \hat{g} de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x \mapsto |x^n \hat{g}(x)| \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

On définit alors F de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans \mathbb{C} par :

$$\forall (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \quad F(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \lambda, y) e^{iz\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$$

où l'on a posé $z = x + iy$; et où ρ est l'application définie à III, 2°.

1° Démontrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad g(x) = F(x, \lambda).$$

2° Démontrer que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ est plate en tout point (z, λ) tel que $z \in \mathbb{R}$

3° $F_z(z, \lambda) = 0$.

4° Soit D le disque fermé dans \mathbb{C} de centre ω et de rayon R ($R > 0$); démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \cap \overset{\circ}{D}, \forall \lambda \in \mathbb{C}^s$$

$$F(t, \lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\omega + Re^{i\theta}, \lambda)}{\omega + Re^{i\theta} - t} e^{i\theta} d\theta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \lambda) \frac{dx dy}{z - t}$$

5° Prouver l'existence de polynômes $R_j(u, \lambda)$ tels que l'on ait l'identité de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{u - z} = \frac{P_s(z, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} \frac{1}{u - z} + \sum_{j=1}^{j=s} \frac{R_{j-1}(u, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} z^{s-j}$$

et démontrer l'existence d'une fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , et d'un polynôme en t

$$R(t, \lambda) = a_1(\lambda) t^{s-1} + \dots + a_s(\lambda)$$

de classe C^∞ en (t, λ) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad g(t) = P_s(t, \lambda) Q(t, \lambda) + R(t, \lambda).$$