

Agrégation 1974

ÉNONCÉ

Dans ce qui suit  $\alpha$  désigne un nombre réel donné une fois pour toutes et tel que  $\alpha > -\frac{1}{2}$ . Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Pour simplifier l'écriture on convient que dans une intégrale du type

$$\int_{-1}^1 F(x) (1-x^2)^\alpha dx.$$

on remplacera le symbole  $(1-x^2)^\alpha dx$  par  $d\sigma(x)$ ; on écrira ainsi cette intégrale

$$\int_{-1}^1 F(x) d\sigma(x)$$

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle fermé  $I = [-1, 1]$ , on pose :

$$(f | g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} d\sigma(x).$$

I

A. Pour toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  on pose :

$$(Lf)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2(\alpha+1)xf'(x); \quad |x| \leq 1$$

1° Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fois continûment dérivables sur  $I$ , on a

$$(Lf | g) = (f | Lg)$$

2° Pour tout entier  $n \geq 0$ , soit  $E_n$  l'ensemble des restrictions à  $I$  des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ . On convient des abus de notation suivants :

— un polynôme et la fonction qu'il définit, ainsi que la restriction de celle-ci à  $I$ , sont désignés par le même symbole;

— pour tout entier  $s \geq 0$ , on note  $x^s$  la fonction  $x \mapsto x^s$ , ( $|x| \leq 1$ ). Ceci étant, montrer :  $L(E_n) \subset E_n$ . En déduire que si  $P$  est un polynôme de degré  $n$  tel que  $(x^s | P) = 0$  pour  $0 \leq s \leq n-1$ , alors  $LP + \lambda_n P = 0$ , où  $\lambda_n$  est un nombre réel qu'on déterminera.

3° On pose :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n (\alpha+1) \dots (\alpha+n)} (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{\alpha+n}].$$

Montrer que  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

Vérifier :

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 \\ (P_n | P_m) = 0 & \text{si } n \neq m \\ \lambda P_n + \lambda_n P_n = 0 \end{cases}$$

B. Pour tout  $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ , le symbole  $\alpha_+$  représente le réel égal à 0 si  $\alpha \leq 0$ , égal à  $\alpha$  si  $\alpha > 0$ . Si  $x, y$  et  $z$  sont des points de  $\bar{I} = ]-1, 1[$  on pose :

$$H(x, y, z) = \frac{(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)_+^{\alpha-1/2}}{(1-x^2)^\alpha (1-y^2)^\alpha (1-z^2)^\alpha}$$

1° A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout entier  $s \geq 0$  l'intégrale

$$\int_{-1}^1 H(x, y, z) z^s d\sigma(z)$$

est un polynôme en  $x$  et  $y$  dont on précisera le degré en  $x$  et le degré en  $y$ .

2° Que peut-on dire de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(x, y, z) P_n(y) P_m(z) d\sigma(y) d\sigma(z)$$

lorsque  $n \neq m$ ?

3° Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$  il existe une constante  $C_n$  telle que, quels que soient les points  $x$  et  $y$  de  $\bar{I}$ , on ait

$$\int_{-1}^1 H(x, y, z) P_n(z) d\sigma(z) = C_n P_n(x) P_n(y).$$

Montrer que  $C_n$  ne dépend pas de  $n$ .

Dans la suite on note  $C$  la valeur commune des  $C_n$ .

## II

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ , et si  $f \in \mathcal{C}$  on pose :

$$\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)| d\sigma(x)$$

Si  $x, y$  et  $z$  sont des points de  $\bar{I}$ , on pose :

$$K(x, y, z) = \frac{1}{C} H(x, y, z)$$

1° Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^{11} K(x, y, z) d\sigma(x) \quad ?$$

En utilisant le résultat de I.B-3°, en déduire que  $|P_n(x)| \leq 1$  pour  $x \in I$ .

2° Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{U}$ , montrer qu'il existe un élément de  $\mathcal{U}$ , qu'on note  $f \cdot g$ , tel que pour tout  $x \in I$  on ait :

$$(f \cdot g)(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, y, z) f(y) g(z) d\sigma(y) d\sigma(z).$$

Montrer que  $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \|g\|$ . Étudier  $P_n \cdot P_m$ .

3° A tout élément  $f$  de  $\mathcal{U}$  on associe l'application  $\widehat{f}$  de l'ensemble  $\mathbf{N}$  des entiers naturels dans  $\mathbf{C}$ , définie par  $\widehat{f}(n) = (f | P_n)$ .

Si  $f, g$  et  $k$  sont des éléments de  $\mathcal{U}$ , montrer que :

- i.  $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
- ii.  $\widehat{f} = 0$  entraîne  $f = 0$
- iii.  $(f \cdot g) \cdot k = f \cdot (g \cdot k)$

4° Soit  $\chi$  une application de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbf{C}$  telle que, quels que soient les éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{U}$  et les nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$ , on ait

$$\chi(\lambda f + \mu g) = \lambda \chi(f) + \mu \chi(g) \quad , \quad \chi(f \cdot g) = \chi(f) \chi(g) .$$

On suppose de plus que si  $(f_i)$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{U}$  telle que  $\lim_i \|f_i\| = 0$ , alors  $\lim_i \chi(f_i) = 0$ .

Montrer que, si  $\chi$  n'est pas identiquement nulle, il existe un entier  $n \geq 0$  et un seul tel que  $\chi(f) = \widehat{f}(n)$  pour tout  $f \in \mathcal{U}$ .

### III

Dans toute la suite du problème on suppose que  $\alpha = 0$ .

1° Soit  $V$  l'ouvert obtenu en privant  $\mathbf{C}$  du segment  $I$ . Montrer que pour tout  $x \in V$  il existe un et un seul  $z \in V$  tel que

$$|z| > 1 \text{ et } x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Dans ce qui suit  $x$  et  $z$  sont ainsi liés.

2° Pour  $x$  fixé dans  $V$ , on considère le cercle orienté  $\Gamma$  que décrit le nombre complexe  $\xi$  défini par  $(\cdot) \frac{\xi - 1}{\xi - x} = \frac{z - 1}{z - x} e^{i\theta}$  lorsque  $\theta$  décrit le segment  $[-\pi, \pi]$ .

Pour tout nombre complexe  $\omega \neq x$  on pose :

$$h(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 - 1}{\omega - x}.$$

Montrer que :

$$P_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [h(\zeta)]^n \frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

3° Calculer  $h(x)$  et  $h'(x)$ . Montrer que la droite passant par  $-1$  et par  $x$  passe aussi par le centre du cercle  $\Gamma$ .

Montrer que  $|z + 1| > |x + 1|$ , puis que, si  $\zeta \in \Gamma$  et  $\zeta \neq x$ , on a  $|h(\zeta)| < |h(x)|$ .

4° Montrer qu'on peut mettre  $P_n(x)$  sous la forme :

$$P_n(x) = -\frac{z^n}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} [G(\theta)]^n \varphi(\theta) d\theta$$

où  $G(\theta) = z^{-1}h(\zeta)$ ,  $\zeta$  et  $\theta$  étant liés par la relation (\*). Sans chercher à expliciter  $G$  et  $\varphi$ , on donnera les valeurs de  $\varphi(0)$  et du coefficient  $b$  tel

que  $G(\theta) = 1 - b\theta^2 + o(\theta^2)$ , lorsque  $\theta$  tend vers zéro. En déduire qu'il existe un nombre  $\gamma > 0$  tel que

$$|G(\theta)| \leq e^{-\gamma\theta^2}$$

pour  $0 \leq |\theta| \leq \pi$ .

5° Montrer que pour tout  $x \in V$ , on a :

$$\lim_n (n^{1/2} z^{-n} P_n(x)) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} (z^2 - 1)^{-1/2}$$

où la détermination de  $(z^2 - 1)^{-1/2}$  dans l'ouvert  $V$  est celle qui est réelle lorsque  $z$  est réel et supérieur à 1.

#### IV

1° Soit  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que  $a_n \geq 1$ , et  $a_n \leq a_r a_s$  lorsque  $n \leq r + s$ .

Montrer que  $\rho = \lim_n (n^{-1} \log a_n)$  existe et est fini.

Que peut-on dire de la position de  $n^{-1} \log a_n$  par rapport à  $\rho$  ?

2° Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $\omega_n^{-1} = (P_n | P_n)$ .

Une suite  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  du type considéré en IV-1° étant fixée, on désigne par  $\mathcal{U}_a$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $I$ , telles que  $\|f\|_a < \infty$ , où l'on pose :

$$\|f\|_a = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n a_n |\hat{f}(n)|.$$

Montrer que si  $f \in \mathcal{U}_a$  et  $x \in I$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \hat{f}(n) P_n(x).$$

3° Montrer qu'il existe des nombres  $c_{n,m,k}$  ( $n, m$  et  $k$  étant des entiers  $\geq 0$ ) tels que  $c_{n,m,k} = 0$  si  $k > n+m$  et

$$P_n P_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,m,k} P_k$$

On admettra sans démonstration que  $c_{n,m,k} \geq 0$ , quels que soient  $n, m$  et  $k$ .

4° Montrer que si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{U}_a$  on a :

$$fg \in \mathcal{U}_a \text{ et } \|fg\|_a \leq \|f\|_a \|g\|_a.$$

5° Soit  $\Phi$  une application de  $\mathcal{U}_a$  dans  $\mathbb{C}$  telle que, quels que soient les éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{U}_a$  et les nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$ , on ait :

$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$$

$$\Phi(fg) = \Phi(f) \Phi(g)$$

On suppose de plus que  $\Phi(P_0) \neq 0$ , et que  $\lim_i \Phi(f_i) = 0$  si  $\lim_i \|f_i\|_a = 0$ .

a. Montrer que si  $\rho = 0$  (cf. la question IV-1° pour la définition de  $\rho$ ) il existe un point  $x_0$  de  $I$  et un seul tel que  $\Phi(f) = f(x_0)$  pour tout  $f \in \mathcal{U}_a$ .

b. Si  $\rho > 0$ , montrer qu'on peut étendre le domaine de définition de tout élément  $f \in \mathcal{U}_a$  en posant encore :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \hat{f}(n) P_n(x)$$

pour tout nombre complexe  $x$  appartenant à la partie compacte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{C}$  délimitée par l'ellipse de foyers  $1, -1$  et de demi-grand axe égal à  $\text{ch } \rho$ .

En déduire alors qu'il existe un point  $x_0$  et un seul de  $\mathcal{S}$  tel que  $\Phi(f) = f(x_0)$  pour tout  $f \in \mathcal{U}_a$ .