UNIVERSITE DE POITIERS
MATHEMATIQUES

1988-1989

PREPARATION A L'AGREGATION

Problème d'Analyse

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES - 1965 -

Analyse.

— Il est rappelé que la présentation et la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de la copie.

N désigne l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes. On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur **R**, à valeurs dans **C**; si f appartient à $\mathcal{F}$, on note ${}_af$ l'élément de $\mathcal{F}$ défini par

$$a \in \mathbf{R} \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}, \qquad {}_af(x) = f(x+a).$$

Lorsque l'ensemble

$$\{|f(x) - g(x)|;\ x \in \mathbf{R}\} \quad (f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{F})$$

admet dans **R** une borne supérieure, elle sera désignée par $\|f - g\|$.

I. — 1° Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. A tout $\varepsilon > 0$, on associe l'ensemble $E(\varepsilon)$, *qui dépend de* f, des nombres réels τ vérifiant

$$\|f - {}_\tau f\| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que, si $E(\varepsilon)$ contient τ, il contient $-\tau$, que $b - a$ appartient à $E(\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$\|{}_bf - {}_af\| \leqslant \varepsilon,$$

et que, si τ_1 appartient à $E(\varepsilon_1)$ et si τ_2 appartient à $E(\varepsilon_2)$, alors $\tau_1 + \tau_2$ appartient à $E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

2° On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{L}$ (sous-ensemble de $\mathcal{F}$) si :

a) elle est continue;

b) quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif l dépendant de ε, tel que, pour tout α réel, l'intervalle $[\alpha, \alpha + l[$ contienne au moins un élément de $E(\varepsilon)$.

Montrer que toute fonction de $\mathcal{F}$, continue et périodique, appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que, si $\mathcal{L}$ contient f, il contient aussi :

$$|f|, \quad \bar{f} \text{ (fonction conjuguée)}, \quad {}_af\ (\forall a;\ a \in \mathbf{R}), \quad kf (\forall k;\ k \in \mathbf{C}).$$

3° Montrer que, si la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de fonctions de $\mathcal{L}$ converge uniformément sur **R** vers une fonction f, alors f appartient à $\mathcal{L}$.

4° Soit f une fonction de $\mathcal{L}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'à tout nombre réel a, on peut associer un nombre réel b, appartenant à l'intervalle $[0, l[$, de façon que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \|{}_bf - {}_af\| \leqslant \varepsilon.$$

5° Montrer que toute fonction de $\mathcal{L}$ est bornée sur **R** et uniformément continue sur **R**.

Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut lui associer $\eta > 0$, de façon que l'intervalle $[-\eta, +\eta]$ soit contenu dans $E(\varepsilon)$.

Montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer $\delta > 0$ et $L > 0$ de façon que, pour tout α réel, l'intervalle $[\alpha, \alpha + L[$ contienne un intervalle $[\beta, \beta + \delta[$ inclus dans $E(\varepsilon)$.

II. — On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, continues et bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme.

On dit qu'une partie $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{B}$ possède la propriété (Π) si, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un ensemble fini $\{f_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de points de $\mathfrak{M}$, de façon que les boules ouvertes de centre f_i, de rayon ε, constituent un recouvrement de $\mathfrak{M}$.

1° *a*) Démontrer que $\mathcal{B}$ est complet.

b) Montrer qu'une partie $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (Π) si, et seulement si, son adhérence est un ensemble compact.

2° Soit f une fonction de $\mathcal{B}$; on appelle $A(f)$ l'ensemble des ${}_af$ quand a varie dans $\mathbf{R}$. Montrer que $A(f)$ vérifie la propriété (Π) si, et seulement si, f appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que $\mathcal{L}$ contient, avec deux éléments, leur somme et leur produit.

3° *a*) Montrer que, si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \quad (a_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R})$$

est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$, sa somme définit une fonction de $\mathcal{L}$.

b) Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{x}{n}}}{n^2}$$

appartient à $\mathcal{L}$ et n'est pas périodique.

4° Comment peut-on caractériser l'ensemble $\mathcal{L}$, non plus seulement dans $\mathcal{B}$ comme en II, 2°, mais dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes?

III. — Dans cette partie, f désigne une fonction de $\mathcal{L}$, t un nombre réel strictement positif; on pose

$$K = \|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx.$$

1° Dans le cas particulier où f est une fonction continue périodique, montrer que $\varphi(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$. Calculer cette limite, pour toute valeur du réel λ, lorsque la fonction f est définie par

$$f(x) = e^{i\lambda x}.$$

2° *a*) Soit T un nombre réel strictement positif; à tout réel positif t', on associe la partie entière n de $\frac{t'}{T}$. Montrer que

$$|\varphi(t') - \varphi(nT)| < \frac{2K}{n}.$$

b) Montrer que

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \forall t > 0,$$
$$\left| \int_0^t f(x)\,dx - \int_\alpha^{\alpha+t} f(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon t + 2Kl.$$

c) En déduire, en décomposant l'intervalle $[0, nt]$ en n intervalles égaux de longueur t, que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \forall t > 0, \qquad |\varphi(t) - \varphi(nt)| \leqslant \varepsilon + \frac{2Kl}{t}.$$

d) Montrer que, étant donné $\varepsilon' > 0$, on peut déterminer n_0, puis t_0, de façon que, pour tout couple (t', t'') vérifiant $t' \geqslant n_0 t_0$, $t'' \geqslant n_0 t_0$, on ait

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \varepsilon'.$$

En déduire que, quand t tend vers $+\infty$, $\varphi(t)$ admet une limite $M(f)$ et que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |\varphi(t) - M(f)| \leqslant \varepsilon + \frac{2Kl}{t}.$$

3° Montrer que $M : f \to M(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}$.

4° Montrer que, pour tout a de $\mathbf{R}$, $M(f) = M({}_af)$ et que la convergence de

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x+a)\,dx$$

vers $M(f)$ est uniforme sur $\mathbf{R}$.

5° Montrer que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\bar{f}(u)\,du$$

admet une limite $\gamma(x)$ quand t tend vers $+\infty$, que la convergence est uniforme par rapport à x sur $\mathbf{R}$, que γ appartient à $\mathcal{L}$ et que

$$M(\gamma) = |M(f)|^2,$$
$$|\gamma(x)| \leqslant \gamma(0) = M(|f|^2).$$

IV. — Soit f une fonction de $\mathcal{L}$. On pose, pour tout λ réel,

$$a(\lambda) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) e^{-i\lambda x} \, dx.$$

1° Dans le cas particulier où f est une fonction continue de période 2π, déterminer $a(\lambda)$ pour les valeurs entières de λ et montrer que $a(\lambda) = 0$ quand λ n'est pas un entier.

2° On pose

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} b_n e^{i\lambda_n x} \quad (b_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R}).$$

Calculer $M(|f - P_k|^2)$. Comment doit-on choisir les nombres complexes b_n pour que, f et λ_n étant donnés, $M(|f - P_k|^2)$ soit minimal? Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} |a(\lambda_k)|^2 \leqslant M(|f|^2).$$

3° Montrer qu'à toute fonction de $\mathcal{L}$ on peut associer un ensemble dénombrable Λ tel que λ appartient à Λ si, et seulement si, $a(\lambda) \neq 0$. Quand λ parcourt Λ, la famille des fonctions $a(\lambda)e^{i\lambda x}$ est dite associée à la fonction f.

Montrer que, pour toute bijection $n \to \lambda_n$ de N sur Λ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a(\lambda_n)|^2 \leqslant M(|f|^2).$$

Déterminer la famille associée à la somme de la série uniformément convergente sur R

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \quad (a_n \in \mathbf{C},\ \lambda_n \in \mathbf{R}).$$

Connaissant la famille associée à une fonction f, déterminer la famille associée à la fonction γ définie en III, 5°.