MINISTERE DE L'EDUCATION

CENTRE NATIONAL DE TELE-ENSEIGNEMENT

Classe: AGR MATH 407 Texte Série 4 AGt 439 A

Professeur PHAM

ANALYSE

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions dites "absolument monotones".

Deux questions préliminaires sont destinées à faire établir des résultats utiles pour l'étude qui suit.

Tout au long du problème, il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction.

Questions préliminaires

1°) On suppose que f est une fonction réelle d'une variable réelle, $(n+1)$ fois dérivable $(n \geqslant 0)$ sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, la dérivée d'ordre $(n+1)$ étant continue sur cet intervalle.

Etablir la formule :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

2°) On définit une suite de fonctions réelles $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ d'une variable réelle, sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{pour } x > n \end{cases}$$

Montrer que $\phi_n(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vers e^{-x}.

Etude des fonctions absolument monotones

Une fonction réelle f d'une variable réelle x, définie sur un ensemble contenant l'intervalle ouvert $]a,b[$, fini ou non, est dite absolument monotone (en abrégé A.M.) sur $]a,b[$ si elle est indéfiniment dérivable sur $]a,b[$, et si l'on a, pout tout $x \in]a,b[$:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ et, quel que soit } n \geqslant 1,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

Si a est fini et $a < b \leqslant +\infty$, la fonction réelle f est dite A.M. sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ lorsqu'elle est A.M. sur $]a,b[$ et, en outre, continue à droite en a.

On définit de façon analogue une fonction A.M. sur un intervalle semi-ouvert $]a,b]$ où b est fini, et $-\infty \leqslant a < b$, et une fonction A.M. sur un intervalle fermé borné $[a,b]$.

I

1°) Dans quels intervalles les fonctions de la variable réelle x prenant respectivement les valeurs :

$$e^x \ ,\quad -\frac{1}{x} \ ,\quad -\operatorname{Log}(-x) \ ,\quad \operatorname{Arc\,sin} x$$

sont-elles A.M. ?

2°) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions A.M. sur un même intervalle sont des fonctions A.M. sur cet intervalle, et que la dérivée d'une fonction A.M. sur un intervalle ouvert est A.M. sur cet intervalle.

Montrer que, si f est A.M. sur un intervalle ouvert I et si g est A.M. sur un intervalle ouvert I' contenant $f(I)$, la fonction composée $g \circ f$ est A.M. sur I.

II

Dans tout ce paragraphe, a et b sont finis (et, naturellement, $a < b$).

1°) Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et A.M. sur cet intervalle ; montrer que f peut être prolongée sur $[a,b[$ de manière à obtenir une fonction A.M. sur $[a,b[$.

Montrer que cette dernière fonction est indéfiniment dérivable en a.

A quelle condition peut-on prolonger f de façon à obtenir une fonction A.M. sur $[a,b]$? la fonction obtenue est-elle dérivable en b ?

2°) Soit maintenant f une fonction définie et A.M. sur $[a,b[$.

a) On pose, pour $a < x < b$:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

Montrer que, pour chaque n , le rapport $\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ est une fonction croissante de x .

b) Montrer que f peut être prolongée par une fonction de la variable complexe z holomorphe dans le disque ouvert $|z-a| < b-a$.

c) Montrer que, si $f(x_0) = 0$, avec $a < x_0 < b$, on a $f(x) = 0$ pour $a \leqslant x < b$.

Que peut-on dire si $f^{(n)}(x_0) = 0$?

3°) $u_1 , u_2 , \dots , u_n , \dots$ étant des fonctions A.M. sur l'intervalle $[a,b[$, on suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est convergente pour tout $x \in [a,b[$.

Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé $[a,b']$ où $a < b' < b$, et que la somme de la série est une fonction A.M. sur $[a,b[$.

III

Dans ce paragraphe, f est une fonction A.M. sur l'intervalle $]-\infty,0[$, et n'est pas constante sur cet intervalle.

1°) Montrer que f peut être prolongée par une fonction F de la variable complexe $z = x + i y$, holomorphe dans le demi-plan ouvert $x < 0$, et que l'on a, pour $x < 0$:

$$|F(z)| \leqslant f(x)$$

2°) Montrer que, pour tout $x < 0$, les valeurs de f et de toutes ses dérivées sont strictement positives.

3°) Montrer que, pour $x < 0$, on a :

$$f'(x) < \frac{2}{|x|}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right] < \frac{2}{|x|} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

et, quel que soit $n \geqslant 1$:

$$f^{(n)}(x) < \frac{k_n}{|x|^n}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right]$$

où k_n est un entier dépendant de n.

En déduire que $x^n f^{(n)}(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$, et montrer que l'on a, pour $x < 0$ et $n > 0$:

$$f(x) - f(-\infty) = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$f(-\infty)$ désignant la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

4°) c étant un nombre strictement positif, on pose :

$$g_1(x) = \left(\frac{x}{c} + 1\right) f'(x) \quad \text{et} \quad g_2(x) = \left(\frac{x}{c} + 1\right) g_1'(x)$$

Montrer que, pour $-c \leqslant x < 0$ et pour u et v réels quelconques :

$$u^2 f(x) + 2uv\, g_1(x) + v^2 g_2(x) \geqslant 0$$

(On pourra utiliser le développement de $f(x)$ en série de Taylor suivant les puissances de $x + c$.)

5°) Montrer que, pour $x < 0$ et pour u et v réels quelconques :

$$u^2 f(x) + 2uv f'(x) + v^2 f''(x) \geqslant 0$$

En déduire que, pour $x < 0$, $f(x) f''(x) - f'^2(x) \geqslant 0$, et que $\operatorname{Log} f$ est une fonction convexe sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

6°) Montrer que l'on a, pour $x < 0$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant \frac{f''(x)}{f'(x)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)} \leqslant \cdots$$

Montrer que la fonction $\delta = ff'' - f'^2$ est A.M. sur $]-\infty, 0[$. Quelle forme a la fonction f si δ s'annule en un point de cet intervalle ?

7°) On suppose que $f(x)$ et $f'(x)$ ont des limites finies, a_0 et

$a_1 = m\,a_o$, quand x tend vers 0 à gauche ; montrer que, pour $x < 0$:

$$f(x) \geqslant a_o\, e^{mx}$$

IV

Pour traiter cette dernière partie, on pourra utiliser les deux résultats suivants, dont on ne demande pas la démonstration :

a) Soit une suite de fonctions réelles $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$, croissantes sur cet intervalle et satisfaisant à :

$$0 \leqslant \varphi_n(u) \leqslant M \quad \text{pour} \quad u \geqslant 0 \ , \quad n \geqslant 1$$

M étant indépendant de n .

Alors, on peut extraire de la suite $\{\varphi_n\}$ une suite qui converge sur $[0,+\infty[$ vers une fonction croissante φ .

b) Soit une suite de fonctions $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et dont chacune est bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$.

On suppose que la suite $\{h_n\}$ converge sur $[0,+\infty[$ vers une fonction h , elle aussi bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$. On suppose en outre que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $u \geqslant 0$:

$$|h_n(u)| \leqslant H(u)$$

où H est une fonction positive, bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$, et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} H(u)\,du$ existe.

Alors, quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du$ tend vers $\int_0^{+\infty} h(u)\,du$.

1°) On suppose que f est une fonction A.M. sur $]-\infty,0[$ et qu'elle est bornée supérieurement sur cet intervalle.

Montrer que, quel que soit $n \geqslant 1$, on a, pour $x < 0$:

$$f(x) = f(-\infty) + \int_0^{+\infty} \phi_n(-xu)\,\varphi_n'(u)\,du$$

où ϕ_n est la fonction considérée dans la question préliminaire et :

$$\varphi_n(u) = f(-\infty) + \frac{1}{n!}\int_{\frac{n}{u}}^{+\infty} t^n\, f^{(n+1)}(-t)\,dt$$

Montrer qu'il existe une fonction φ croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$, positive et bornée supérieurement sur cet intervalle, telle que, pour $x < 0$:

$$f(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{xu} \varphi(u)\, du$$

On ne demande pas d'examiner la question de l'unicité de la fonction .

2°) Inversement, φ étant une fonction positive, croissante et bornée supérieurement sur l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction f définie pour $x<0$ par :

$$f(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{xu} \varphi(u)\, du$$

est-elle A.M. sur $]-\infty,0[$ et bornée supérieurement sur cet intervalle ?

(Agrégation 1964)
