Topologie sur $\mathcal{F}(X,Y)$	Y est :	$\mathcal{F}(X,Y)$ est :	$\mathcal{C}(X,Y)$ est	Si X est	Cas de parties de $\mathcal{F}(X,Y)$
$\mathcal{C}.c.\mathcal{S}$ Moins fine: $f \mapsto f(x)$ continue. Identifiable à celle de Y^X. Topologie convergence simple. T.C.S	compact connexe séparé	compact connexe séparé	non fermé dans $\mathcal{F}(X,Y)$	aucune topologie requise	$\mathcal{F}$ relativement compacte $\Leftrightarrow \mathcal{F}(x)$ aussi $\mathcal{F}$ relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ $\Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ et $\overline{\mathcal{F}}(X,Y)$ r.k. $\mathcal{F}$ équicontinue $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}}$ aussi.
$\mathcal{C}.C.U$ Définie par $e(f,g) = \sup_{x \in X} [f(x), g(x)$ Topologie convergence uniforme. T.C.U.	M E T R I Q U E complet $\longrightarrow$	M E T R I S A B L E complet $\longrightarrow$	Fermé dans $\mathcal{F}(X,Y)$ Si $\longrightarrow$ complet	X est muni d'une topo-logie,	T.C.S = T.C.U Sur toute partie équicontinue $\longrightarrow$ Compact $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ relativement compacte si X ~~est~~... $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ équicontinue et $\mathcal{F}(x)$ relativement compacte.
T.C.K. $\mathfrak{S}$ = {A compact} $e_A(f,g) = \sup_{x \in A} d(f(x)g(x)$ Topologie convergence compacte. T.C.K.	Métrique	Métrisable $e_A(f,g)$	$\mathcal{C}(X,Y)$ reste fermé dans $\mathcal{F}(X,Y)$ Si $\longrightarrow$	X est localement compact	<u>Théorème de Stone-Weierstrass:</u> .Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ où X est métrique compact. a) Si $\mathcal{A}$ ne s'annule en aucun point, i.e. si $\forall x \in X$, $f \in \mathcal{A}$ et $f(x) \neq 0$. b) Si $\mathcal{A}$ sépare les points, i.e. $\forall (x_1, x_2)$, $x_1 \neq x_2$ $\exists f \in \mathcal{A}$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$ Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ pour T.C.U. Dans le cas complexe, si, de <u>plus</u>, lorsque $f \in \mathcal{A}$, alors $\overline{f} \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{A}$ soit dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$.

PROBLÈMES

Année 1958

RÉVISION DE TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES D'ANALYSE

ÉNONCÉ

I

t et z désignant deux variables complexes indépendantes, donner les développements en série entière de z des fonctions e^{zt} et $e^{\frac{z}{t}}$. En déduire un développement de $g(z, t) = e^{z(t+\frac{1}{t})}$ suivant les puissances négatives, nulles et positives de t :

$$g(z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\, t^n$$

Pour quelles valeurs de z et de t ce développement est-il valable ?

Comparer $f_n(z)$ et $f_{-n}(z)$. Vérifier quel'on a, pour $n \geqslant 0$:

$$(1) \qquad f_n(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}$$

On définit $a_n(z)$ par l'égalité

$$(2) \qquad f_n(z) = \frac{z^n}{n!}\,[1 + a_n(z)]$$

Montrer que $a_n(z)$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini, uniformément pour $|z| \leqslant M$, M étant un nombre positif quelconque. Montrer également que, z et z' étant deux nombres dont le module est inférieur à M, et ε un nombre positif arbitraire, il est possible de déterminer un nombre N ne dépendant que de M et de ε tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :

$$(3) \qquad |a_n(z) - a_n(z')| \leqslant \varepsilon\, |z - z'|$$

Montrer que les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes pour tout z et s'expriment par les intégrales :

$$(4) \qquad f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z,\ t)\ t^{n-1}\ dt$$

où γ désigne une courbe convenable du plan de la variable t.

Vérifier que $f_n(z)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$(5) \qquad z^2 \frac{d^2 f_n}{dz^2} + z\,\frac{df_n}{dz} - (4z^2 + n^2)\ f_n = 0.$$

Montrer que si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge uniformément vers $g(z,\ t)$ pour $|t| = r > 0$, z étant fixé, on a $c_n = f_n(z)$ quel que soit n. En supposant seulement que $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$ converge vers $g(z,\ t)$ pour deux valeurs de t de modules distincts, peut-on conclure aux égalités $c_n = f_n(z)$?

II

Dans cette partie, ainsi que dans la quatrième, on se propose d'étudier les séries de la forme :

$$(6) \qquad \sum_{o}^{\infty} a_n\ f_n(z)$$

où les a_n désignent des coefficients numériques et où les $f_n(z)$ sont les fonctions définies par (1).

Montrer que ces séries possèdent en général un "rayon de convergence" $R \geqslant 0$ jouissant de propriétés analogues à celui d'une série entière. Exprimer R à l'aide de la suite des a_n.

On suppose dorénavant $R > 0$; pour $|z| < R$, la série (6) converge ; soit $h(z)$ sa somme. Montrer que $h(z)$ est holomorphe pour $|z| < R$. On veut examiner si, réciproquement, toute fonction $k(z)$ holomorphe dans un cercle ayant l'origine pour centre est la somme d'une série (6). Dans ce but, on établira d'abord l'égalité :

$$(7) \qquad z^m = \frac{m!}{2i\pi} \int_{\gamma'} u^{m-1}\ e^{\frac{z}{u}}\ du \qquad m \text{ entier positif}$$

où γ' désigne une courbe convenable du plan de la variable u ; puis, en faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{t^2+1}$ et en utilisant le développement de u^m en série entière de t, on établira la formule :

$$(8) \qquad z^m = \sum_{p=o}^{\infty} (-1)^p\ (m+2p)\ \frac{(m+p-1)!}{p!}\ f_{m+2p}\ (z)$$

Cette formule est-elle valable pour $m = 0$? Quel est le domaine de validité de la représentation de $k(z)$ par une série (6) ? Cette représentation est-elle unique ? Donner les valeurs des coefficients a_n relatifs aux fonctions $k(z) = e^{cz}$ où c désigne un nombre indépendant de z. Pourrait-on, à partir de là, retrouver la formule (8) ? Effectuer les calculs correspondants, pour $m = 0$ et $m = 1$.

III

Cette partie est indépendante des précédentes. On se propose d'y établir certaines propriétés des séries entières qu'on étendra, dans IV, aux séries (6). On sait que, si la série $\sum_{o}^{\infty} b_n$ converge, la série $\sum_{o}^{\infty} b_n x^n$ converge uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que, en particulier, il en résulte l'égalité :

$$(9) \qquad \lim_{x \to 1-o} \sum_{o}^{\infty} b_n x^n = \sum_{o}^{\infty} b_n$$

le symbole $x \to 1 - 0$ signifiant que x tend vers 1 par valeurs inférieures à 1.

Montrer, en utilisant un développement en série entière classique, que le premier membre de (9) peut exister bien que la série figurant au second membre diverge.

En supposant que chaque nombre b_n soit astreint à la seule condition :

$$(10) \qquad n\,|b_n| \leqslant 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ldots)$$

et en posant :

$$\sum_{o}^{\infty} b_n x^n = \varphi(x), \text{ pour } 0 \leqslant x < 1, \text{ démontrer l'égalité :}$$

$$(11) \qquad \left|\varphi(x) - \sum_{o}^{n} b_n\right| < \sum_{1}^{n} \frac{n}{p} + \mathrm{Log}(1-x) + 2\int_{o}^{x} \frac{u^n}{1-u}\ du$$

En déduire l'inégalité suivante, où A_* désigne une constante absolue :

$$(12) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\varphi(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{0}^{n} b_p\right| \leqslant A.$$

A-t-on, dans les mêmes conditions.

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}} \left|\varphi(x) - \sum_{0}^{E(x)} b_p\right| \leqslant A$$

dans laquelle $E(x)$ désigne la partie, entière du nombre $\frac{1}{1-x}$?.

Montrer que l'égalité $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$ implique l'égalité :

$$\lim_{x\to 1-0} \left[\varphi(x) - \sum_{0}^{E(x)} b_p\right] = 0$$

IV

Adapter aux séries (6) les diverses propriétés énoncées ou démontrées en III dans le cas des séries entières. Il sera utile de démontrer d'abord l'égalité :

$$\lim_{x\to R-0} \left[\sum_{0}^{\infty} a_n f_n(x) - \sum_{0}^{\infty} a_n f_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n\right] = 0$$

valable lorsque l'ensemble des nombres $a_n f_n(R)$ est borné supérieurement, et où R désigne le "rayon deconvergence", supposé positif, de la série (6) considérée.

V

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(13) \qquad \psi(x) = \lambda \int_{0}^{1} t\, e^{-n\left|\log \frac{x}{t}\right|} \psi(t)dt \qquad 0 < x \leqslant 1$$

où λ désigne un nombre réel fixe et n un entier positif ; $\psi(x)$ est une fonction inconnue qu'on suppose bornée et intégrable pour $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, quel que soit $\varepsilon > 0$, et telle que l'intégrale $\int_{0}^{1} |\psi(t)|dt$ ait un sens.

Il pourra être commode de décomposer l'intervalle d'intégration $(0, 1)$ en les intervalles partiels $(0, x)$ et $(x, 1)$.

Déduire successivement de l'équation (13) et des conditions imposées à $\psi(x)$ que :

$\psi(x)$ est continue pour $0 < x \leqslant 1$;

$\psi(x)$ tend vers 0 avec x. On posera $\psi(0) = 0$;

$\psi(x)$ a une dérivée pour $0 < x < 1$, ainsi qu'une dérivée à droite et une dérivée à gauche respectivement pour $x = 0$ et $x = 1$.

$\psi(x)$ a une dérivée seconde pour $0 < x < 1$.

Montrer en outre que $\psi(x)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$(14) \qquad x^2 \psi'' + x\psi' + (2\lambda n\, x^2 - n^2)\psi = 0.$$

En déduire les conséquences suivantes :

Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right) \neq 0$, l'équation (13) n'admet que la solution banale identiquement nulle.

Si $f_{n-1}\left(i\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right) = 0$, l'équation (13) admet la solution :

$$\psi(x) = C\, f_n\left(ix\sqrt{\frac{n\lambda}{2}}\right)$$

où C désigne une constante arbitraire.

On veut établir que la condition précédente est réalisable. Pour cela, on montrera d'abord (ou on admettra) que $f_{n-1}(z)$ a une infinité de zéros qui ne peuvent d'ailleurs pas être réels non nuls ; désignant par a et b deux constantes, on formera les équations différentielles satisfaites par $u(x) = f_{n-1}(ax)$ et $v(x) = f_{n-1}(bx)$ et on en déduira que $x(u'v - uv')$ est une primitive de $4(a^2 - b^2)\, xuv$. Enfin, en considérant l'intégrale :

$$\int_{0}^{1} x f_{n-1}(ax)\, f_{n-1}(bx)dx$$

pour des valeurs convenables de a et b, on montrera que l'hypothèse de l'existence de zéros de $f_{n-1}(z)$ non imaginaires purs conduit à une contradiction.