Agrégation Externe

Le groupe linéaire

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique..* Dunod. 1999.
– S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 2 et 3.* Cassini (2009).
– K. Madere. *Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçons d'algèbre.* Ellipses (1998).
– R. Mneimne. *Réduction des endomorphismes.* Calvage et Mounet (2006).
– P. Ortiz. *Exercices d'algèbre.* Ellipses (2004).
– D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
– J. E. Rombaldi. *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).
– P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).

Notations

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel supposé de dimension finie dans un premier temps.

En compléments, on s'intéressera au cas de la dimension infinie.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E.

$GL(E) = (\mathcal{L}(E))^{\times}$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$, soit le groupe des automorphismes de E.

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual de E.

On rappelle qu'un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour E de dimension finie, le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où n est la dimension de E.

Cet isomorphisme induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

Une matrice scalaire est une matrice diagonale de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une homothétie est un endomorphisme de E de la forme λId, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

– I – Premières propriétés. Questions diverses

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. **Caractérisations des éléments de $GL(E)$**
   Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $u \in GL(E)$;
   (b) $\ker(u) = \{0\}$ (u est injectif);
   (c) $\operatorname{Im}(u) = E$ (u est surjectif);
   (d) $\operatorname{rg}(u) = n$;
   (e) $\det(u) \neq 0$;
   (f) u transforme toute base de E en une base de E;
   (g) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id$;
   (h) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = Id$.
2. **Cas des corps finis**
   Pour cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments (on a alors $q = p^r$, où $p \geq 2$ est un nombre premier et r est un entier naturel non nul).
   (a) Montrer que :
   $$\operatorname{card}(GL(E)) = \prod_{k=1}^{n} \left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left(q^j - 1\right)$$
   (b) Soient E, F deux $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$.
   Déduire de la question précédente que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, les groupes $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes.
   (c) Montrer que si $\mathbb{L}$ est un corps tel que les groupes $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $GL_n(\mathbb{L})$ soient isomorphes, $\mathbb{L}$ est alors un corps fini à q éléments (donc isomorphe à $\mathbb{F}_q$).

(d) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, montrer qu'un automorphisme $u \in GL(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, $u^{q-1} = Id$.

(e) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, en désignant par $DL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E qui sont diagonalisables, montrer que :

$$\operatorname{card}(DL(E)) = \sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_{q-1})\in\mathbb{N}^{q-1} \\ n_1+\cdots+n_{q-1}=n}} \frac{\operatorname{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))}{\operatorname{card}(GL_{n_1}(\mathbb{F}_q))\cdots\operatorname{card}\left(GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)\right)}$$

avec la convention $\operatorname{card}(GL_0(\mathbb{F}_q)) = 1$.
Indication : vérifier que $DL(E)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{F}$ des familles $(E_1, \cdots, E_{q-1})$ de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} E_k$, puis utiliser une action du groupe $GL(E)$ sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\dim(E_k) = n_k$, où $(n_1, \cdots, n_{q-1})$ est fixé.

(f) En notant $q = p^r$ avec $p \geq 2$ premier et $r \geq 1$, donner un exemple de p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n \geq 2$.

(g) Montrer que, tout groupe fini d'ordre $n \geq 1$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.
Indication : utiliser un théorème de Cayley et les matrices de permutations.

(h) Rappeler comme le résultat précédent permet de montrer le premier théorème de Sylow : si G est un groupe d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 1$ et p premier ne divisant pas m, il existe alors un p-Sylow de G.

3. **$GL(E)$ coupe tout hyperplan de $\mathcal{L}(E)$**
Montrer que pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$, on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

4. **Bases de $\mathcal{L}(E)$ dans $GL(E)$**
En supposant que le corps $\mathbb{K}$ est infini, montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.

– II – Sous-groupes de $GL(E)$

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
$SL(E)$ [resp. $SL_n(\mathbb{K})$] est le sous-ensemble de $GL(E)$ défini par :

$$SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}, \ SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

1. **Le sous-groupe $SL(E)$**

(a) Montrer que $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$ (distingué dans $GL_n(\mathbb{K})$) et que le groupe quotient $\dfrac{GL(E)}{SL(E)}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

(b) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ (corps fini à q éléments), montrer que :

$$\operatorname{card}(SL(E)) = q^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=2}^{n}\left(q^k - 1\right)$$

(c) Pour $n = 2$, quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $SL(E)$?

2. **Centres de $GL(E)$ et de $SL(E)$**
On note $Z(G)$ le centre d'un groupe $(G, \cdot)$.

(a) Montrer que $Z(GL(E)) = \mathbb{K}^* \cdot Id$.

(b) Les groupes $GL_n(\mathbb{Q})$, $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ peuvent-ils être isomorphes ?

(c) Montrer que $Z(SL(E)) = \mu_n(\mathbb{K}) \cdot Id$ où $\mu_n(\mathbb{K}) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda^n = 1\}$ est le groupe multiplicatif des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{K}^*$.

(d) Montrer que $Z(PGL(E)) = Z(PSL(E)) = \left\{\overline{I_n}\right\}$, où $PGL(E) = GL(E)/Z(GL(E))$ et $PSL(E) = SL(E)/Z(SL(E))$ (groupes projectifs).

(e) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, les groupes $PGL_n(\mathbb{K})$ et $PSL_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

(f) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathrm{card}(PGL_n(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{card}(SL_n(\mathbb{F}_q))$$

$$\mathrm{card}(Z(SL_n(\mathbb{F}_q))) = n \wedge (q-1)$$

$$\mathrm{card}(PSL_n(\mathbb{F}_q)) = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n \wedge (q-1)} \prod_{j=2}^{n} (q^j - 1)$$

3. **Isomorphisme entre $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K}) \times Z(GL_n(\mathbb{K}))$**
On suppose que $n \geq 2$.

(a) On suppose que le morphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{K}^* & \to & \mathbb{K}^* \\ & \lambda & \mapsto & \lambda^n \end{array}$$

est un isomorphisme.

i. Donner des exemples de telle situation.

ii. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \theta_n : & SL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^* & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (S, \lambda) & \mapsto & \lambda S \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes ($GL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe $SL_n(\mathbb{K}) \times Z(GL_n(\mathbb{K}))$).

(b) On suppose qu'il existe un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \theta_n : & SL_n(\mathbb{K}) \times G & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (S, A) & \mapsto & SA \end{array}$$

soit un isomorphisme de groupes.

i. Montrer que l'application det : $G \to \mathbb{K}^*$ est un isomorphisme de groupes et que le groupe G est commutatif.

ii. Montrer que $G = Z(GL_n(\mathbb{K}))$ et φ_n est un isomorphisme.

Remarque : De manière générale, $GL_n(\mathbb{K})$ est produit semi-direct de $SL_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^*$ (voir Perrin).

4. **Sous-groupes finis de $GL(E)$ dont tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2**
On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 et on se donne un sous-groupe fini G de $GL(E)$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2.

(a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables de valeurs propres dans $\{-1, 1\}$.

(b) Montrer que G est commutatif de cardinal 2^r où r est un entier compris entre 0 et n.

(c) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$.
Montrer que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, les groupes $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes.
Pour $\mathbb{K}$ fini de caractéristique 2, c'est encore vrai (question **I.2b**).
Pour $\mathbb{K}$ infini de caractéristique 2, c'est encore vrai (plus difficile, voir J. Fresnel, Algèbre des matrices, Hermann, exercice A.4.7.21.3).

5. **Sous-groupes finis de $GL(E)$, un théorème de Burnside**
Le théorème de Burnside qui suit nous donne deux caractérisations des sous-groupes finis de $GL(E)$.
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle et algébriquement clos.
On rappelle qu'un groupe G est dit d'exposant fini s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $g^m = 1$ pour tout $g \in G$.
Le théorème de Lagrange nous dit que tout groupe fini est d'exposant fini (si G est d'ordre $n \geq 1$, tout élément g de G a un ordre qui divise n, donc $g^n = 1$).
Pour les sous-groupe de $GL(E)$, le théorème de Burnside nous dit que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'un sous-groupe de $GL(E)$ est fini si, et seulement si, il est d'exposant fini.

(a) Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables et que l'ensemble :
$$\mathrm{tr}(G) = \{\mathrm{tr}(u) \mid u \in G\}$$
est fini.

(b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de u.

(c) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n = \dim(E)$.

(d) Soient G un sous-groupe de $GL(E)$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G, $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F extraite de G et φ l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \mathbb{K}^p \\ & u & \mapsto & (\mathrm{tr}(u \circ u_1), \cdots, \mathrm{tr}(u \circ u_p)) \end{array}$$

i. Montrer que si u, v dans G sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, l'endomorphisme $u \circ v^{-1} - Id$ est alors nilpotent.

ii. Dans le cas où tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que l'application φ est injective.

(e) Soit G un sous-groupe de $GL(E)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i. G est fini ;

ii. G est d'exposant fini ;

iii. tous les éléments sont diagonalisables et $\mathrm{tr}(G)$ est fini.

6. Soient H une partie de $\mathcal{L}(E)$ contenant Id et stable par la composition des applications.
Montrer que $G = H \cap GL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

– III – Générateurs de $SL(E)$ et de $GL(E)$

E est de dimension finie $n \geq 2$.

Définition 1 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\, a \tag{1}$$

où $a \in \ker(\varphi)$.

Définition 2 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in GL(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\, a \tag{2}$$

où $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

On notera $\tau_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une transvection définie par (1), où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$ et $\delta_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une dilatation définie par (2) où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \notin \ker(\varphi)$.

Avec notre définition $Id = \tau_{\varphi,0}$ est une transvection (transvection triviale). C'est la définition prise par Ramis-Warusfel, mais pas celle de Perrin où l'identité n'est pas une transvection.

1. **Transvections, définitions équivalentes**
   Montrer que pour $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{Id\}$, les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) u est une transvection.
   (b) Il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et $\mathrm{Im}(u - Id) \subset H$.
   (c) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (avec $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
   (d) Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$
   avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
   (e) $\mathrm{rg}(u - Id) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X-1)^n$.

2. **Quelques propriétés des transvections**
   (a) Montrer qu'une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est un isomorphisme de E, son inverse étant la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, puis que 1 est son unique valeur propre, l'espace propre associé étant $\ker(\varphi)$ si $u \neq Id$.
   (b) Montrer que l'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est un sous groupe commutatif de $GL(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
   (c) Montrer que le polynôme minimal d'une transvection $u \neq Id$ est $(X-1)^2$.
   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ ayant au moins 3 éléments ($\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$), toute transvection différente de Id s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.
   (e) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.
   (f) Montrer que, pour $n \geq 3$, toutes les transvections différentes de Id sont conjuguées dans $SL(E)$.
   Que se passe-t-il pour $n = 2$?

3. **Dilatations, définitions équivalentes**
Soit $u \in GL(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) u est une dilatation.
   (b) Il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et u est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ (c'est-à-dire que $E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - \lambda Id)$).
   On dit que u est une dilatation de rapport λ (pour $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et $\lambda = -1$, on dit que u est une réflexion d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$).
   (c) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$$
   avec $\lambda = \det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.
4. **Quelques propriétés des dilatations**
   (a) Montrer que l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.
   (b) Montrer que le polynôme minimal d'une dilatation de rapport λ est $(X-1)(X-\lambda)$.
   (c) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
   (d) Montrer que deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si, et seulement si, elles ont même rapport.
5. **Générateurs de $SL(E)$**
On se propose de montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $SL(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.
   (a) Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $a \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$.
      i. Montrer que $H = H_1 \cap H_2 \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E.
      ii. Montrer que $E = H + H_1 = H + H_2$.
      iii. Montrer qu'il existe une transvection u telle que $u(a) = a$ et $u(H_1) = H_2$.
      Indication : pour $a_2 \in H_2 \setminus H$, on justifiera l'existence de $a_1 \in H_1 \setminus H$ et $b \in H$ tels que $a_2 = a_1 + b$, puis on peut considérer la transvection $\tau_{\varphi,b}$ où φ est une équation de H telle que $\varphi(a_1) = 1$.
   (b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans E, il existe $u \in SL(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u(x)$.
   (c) Montrer que le groupe $SL(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.
   Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant les opérations élémentaires sur les matrices.
6. **Générateurs de $GL(E)$.**
   (a) Montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations et des transvections.
   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ ayant au moins trois éléments ($\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$), le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations.
   (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des matrices diagonalisables inversibles.
   (d) Montrer que le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble $TN(E)$ des automorphismes de E de trace nulle.
   Indication : utiliser des matrices de permutation pour $n \geq 3$.

7. **Groupes dérivés de $GL(E)$ et de $SL(E)$**
On rappelle que le groupe dérivé d'un groupe $(G, \cdot)$ est le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire les éléments de G de la forme :
$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$
où a, b sont dans G.
   (a) Montrer que $D(GL(E)) \subset SL(E)$ et $D(SL(E)) \subset SL(E)$.
   (b) Montrer que, pour toute transvection $\tau_{\varphi,a}$ ($\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$), $\tau_{\varphi,a}^2$ est une transvection.
   (c) Pour $n \geq 3$ et $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, déduire du résultat précédent que $D(GL(E)) = SL(E)$ et $D(SL(E)) = SL(E)$.
   (d) Pour $n \geq 3$, montrer que $D(GL(E)) = SL(E)$ et $D(SL(E)) = SL(E)$.
   Indication : on peut utiliser une représentation matricielle.
   (e) Pour $n = 2$ et $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ montrer que $D(GL(E)) = SL(E)$.
   (f) Pour $n = 2$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ et $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_3$, montrer que $D(SL(E)) = SL(E)$.
   Pour $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, on a $D(SL(E)) \backsimeq \mathcal{A}_3$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, on a $D(SL(E)) \backsimeq \mathbb{H}_8$ (voir Perrin, exercices).

8. **Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ pour $\mathbb{K}$ infini**
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est infini et on se donne un morphisme de groupes γ de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ qui soit une fonction polynomiale des coefficients a_{ij} des matrices $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que pour toute matrice de la dilatation $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, on a $\gamma(D_n(\lambda)) = \lambda^r$.
   (b) Montrer que, pour toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{F}_q$, on a $\gamma(T_{ij}(\lambda)) = 1$.
   (c) Déduire de ce qui précède que :
$$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ \gamma(A) = (\det(A))^r$$

9. **Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ pour $\mathbb{K}$ fini**
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et on se donne un morphisme de groupes γ de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{F}_q^*$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel r compris entre 0 et $q-2$ tel que pour toute matrice de la dilatation $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, on a $\gamma(D_n(\lambda)) = \lambda^r$.
   (b) Montrer que, pour toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{F}_q$, on a $\gamma(T_{ij}(\lambda)) = 1$.
   (c) Déduire de ce qui précède que :
$$\forall A \in GL_n(\mathbb{F}_q),\ \gamma(A) = (\det(A))^r$$

– IV – Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Pour cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

1. **Densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$**

   (a) Montrer que $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans $GL(E)$.

   (b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais fermé dans $GL_n(\mathbb{C})$.

   (c) Montrer, en utilisant la densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.

   (d) Pour tout entier $n \geq 2$, toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous i, j compris entre 1 et n, on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.
   Le scalaire $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice (i,j) et le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ est le cofacteur d'indice (i,j).
   La comatrice de A est la matrice :
   $$C(A) = \left(\left((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
   Montrer que :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(C(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

   (e) Montrer que :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ C(AB) = C(A)\,C(B)$$

   (f) Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors leurs comatrices le sont aussi.

2. **Connexité de $GL(E)$**

   (a) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs.

   (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $SL(E)$ est connexe par arcs.

   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $GL(E)$ n'est pas connexe, puis que ses composantes connexes sont les ouverts de $\mathcal{L}(E)$:
   $$GL^+(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) > 0\} \text{ et } GL_n^-(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) < 0\}$$
   Ce résultat permet de définir une orientation sur un espace vectoriel réel E de dimension n. On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la même orientation si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.

3. **Sous-groupes de $GL(E)$.**

   (a) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Montrer que si G est un sous-groupe borné de $GL(E)$, alors toutes les valeurs propres des éléments de G sont de module égal à 1, puis que tous ses éléments sont diagonalisables.

   (b)

      i. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$, il existe alors un entier naturel p tel que $|1-\lambda^p| > \sqrt{2}$.

      ii. Montrer que le seul sous-groupe de $GL(E)$ contenu dans la boule de centre Id et de de rayon $\sqrt{2}$ est $\{Id\}$.