Agrégation Externe

Le groupe linéaire

Ce problème est l'occasion de revoir les points de cours suivants :

– action de groupe : orbites, stabilisateurs, utilisation en dénombrement ;
– ordre d'un élément dans un groupe, groupes finis, théorème de Lagrange ;
– parties génératrices d'un groupe ;
– corps finis, sous-groupes finis de $\mathbb{K}^*$;
– déterminant ;
– formes linéaires et hyperplans ;
– endomorphismes nilpotents ;
– critères de diagonalisabilité ;
– groupe linéaire d'un espace vectoriel E, sous-groupes de $GL(E)$;
– applications linéaires continues entre espaces normés.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique.*. Dunod. 1999.
– S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 2.* Cassini (2009).
– X. Gourdon. *Les Maths en tête. Algèbre.* Ellipses.
– R. Mneimne. *Réduction des endomorphismes.* Calvage et Mounet (2006).
– P. Ortiz. *Exercices d'algèbre.* Ellipses (2004).
– D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
– J. E. Rombaldi. *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).
– P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).

Notations

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel supposé de dimension finie $n \geq 2$.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E.

$GL(E) = (\mathcal{L}(E))^{\times}$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$, soit le groupe des automorphismes de E.

Pour E de dimension finie, $SL(E)$ est le sous-ensemble de $GL(E)$ défini par :

$$SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual de E.

On rappelle qu'un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$SL_n(\mathbb{K})$] est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

Pour E de dimension finie, le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où n est la dimension de E.

Cet isomorphisme induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL(E)$ sur $SL_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

Une matrice scalaire est une matrice diagonale de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une homothétie est un endomorphisme de E de la forme λId, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

– I – Premières propriétés

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. **Caractérisations des éléments de $GL(E)$**
   Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $u \in GL(E)$;
   (b) $\ker(u) = \{0\}$ (u est injectif) ;
   (c) $\mathrm{Im}(u) = E$ (u est surjectif) ;
   (d) $\mathrm{rg}(u) = n$;
   (e) $\det(u) \neq 0$;
   (f) u transforme toute base de E en une base de E ;
   (g) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id$;
   (h) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = Id$.

2.
   (a) Montrer que si $u \in GL(E)$, on a alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
   (b) Le résultat précédent est-il valable en dimension infinie ?
   (c) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant Id et stable par la composition des endomorphismes, l'ensemble $G = F \cap GL(E)$ est alors un sous-groupe de $GL(E)$.

3. On suppose que $n \geq 2$.

   (a) Montrer que pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ell(A) = \operatorname{Tr}(AB)$$
   ce qui signifie que l'application linéaire :
   $$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ & B & \mapsto & \varphi(B) : A \mapsto \operatorname{Tr}(AB) \end{array}$$
   est un isomorphisme.

   (b) En déduire que pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ ($GL_n(\mathbb{K})$ coupe tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

4. En supposant que le corps $\mathbb{K}$ est infini, montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'automorphismes.

– II – Sous-groupes de $GL(E)$

1. Montrer que $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$ (qui est aussi distingué dans $GL_n(\mathbb{K})$) et que le groupe quotient $\dfrac{GL(E)}{SL(E)}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.
2. En notant $Z(G)$ le centre d'un groupe G, montrer que :
   $$Z(GL(E)) = \mathbb{K}^* \cdot Id \text{ et } Z(SL(E)) = \mu_n(\mathbb{K}) \cdot Id$$
   où $\mu_n(\mathbb{K}) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda^n = 1\}$ est le groupe multiplicatif des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{K}^*$.
3. Les groupes $GL_n(\mathbb{Q})$, $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ peuvent-ils être isomorphes ?
4. Montrer que :
   $$Z(GL(E)) = \{u \in GL(E) \mid \forall v \in GL(E),\ \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tel que } u \circ v = \lambda v \circ u\}$$
5. On note $PGL_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) / Z(GL_n(\mathbb{K}))$ et $PSL_n(\mathbb{K}) = SL_n(\mathbb{K}) / Z(SL_n(\mathbb{K}))$ (groupes linéaires projectifs).

   (a) Montrer que $Z(PGL_n(\mathbb{K})) = Z(PSL_n(\mathbb{K})) = \left\{\overline{I_n}\right\}$.

   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, les groupes $PGL_n(\mathbb{K})$ et $PSL_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

6. On suppose que $n \geq 2$.

   (a) On suppose que le morphisme de groupes :
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_n: & \mathbb{K}^* & \to & \mathbb{K}^* \\ & \lambda & \mapsto & \lambda^n \end{array}$$
   est un isomorphisme.

      i. Donner des exemples de telle situation.

      ii. Montrer que l'application :
      $$\begin{array}{rccc} \theta_n: & SL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^* & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (S, \lambda) & \mapsto & \lambda S \end{array}$$
      est un isomorphisme de groupes ($GL_n(\mathbb{K})$ est isomorphe $SL_n(\mathbb{K}) \times Z(GL_n(\mathbb{K}))$).

(b) On suppose qu'il existe un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \theta_n : & SL_n(\mathbb{K}) \times G & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ & (S, A) & \mapsto & SA \end{array}$$

soit un isomorphisme de groupes.

i. Montrer que l'application $\det : G \to \mathbb{K}^*$ est un isomorphisme de groupes et que le groupe G est commutatif.

ii. Montrer que $G = Z(GL_n(\mathbb{K}))$ et φ_n est un isomorphisme.

De manière générale, $GL_n(\mathbb{K})$ est produit semi-direct de $SL_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^*$ (voir Perrin).

7. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 et on se donne un sous-groupe fini G de $GL(E)$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2.

(a) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables de valeurs propres dans $\{-1, 1\}$.

(b) Montrer que G est commutatif de cardinal 2^r où r est un entier compris entre 0 et n.

(c) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$.
Montrer que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, les groupes $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes.
Pour $\mathbb{K}$ fini de caractéristique 2, c'est encore vrai.
Pour $\mathbb{K}$ infini de caractéristique 2, c'est encore vrai (plus difficile, voir J. Fresnel, Algèbre des matrices, Hermann, exercice A.4.7.21.3).

8. Le théorème de Burnside qui suit nous donne deux caractérisations des sous-groupes finis de $GL(E)$ pour un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et algébriquement clos. [1]

(a) Montrer que si G est un sous-groupe fini de $GL(E)$, alors tous ses éléments sont diagonalisables et l'ensemble :

$$\operatorname{tr}(G) = \{\operatorname{tr}(u) \mid u \in G\}$$

est fini.

(b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de u.

(c) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\operatorname{Tr}\left(u^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n = \dim(E)$.

(d) Montrer que le résultat précédent est en fait valable pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

(e) Soient G un sous-groupe de $GL(E)$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G, $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F extraite de G et φ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \mathbb{K}^p \\ & u & \mapsto & (\operatorname{tr}(u \circ u_1), \cdots, \operatorname{tr}(u \circ u_p)) \end{array}$$

i. Montrer que si u, v dans G sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, l'endomorphisme $u \circ v^{-1} - Id$ est alors nilpotent.

ii. Dans le cas où tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que l'application φ est injective.

(f) Soit G un sous-groupe de $GL(E)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i. G est fini ;

ii. G est d'exposant fini ;

iii. tous les éléments sont diagonalisables et $\operatorname{tr}(G)$ est fini (théorème de Burnside).

1. développement possible pour la leçon $GL(E)$

– III – Cas des corps finis [2]

Pour cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments et E est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On rappelle que si $\mathbb{K}$ est un corps fini à q éléments, on a alors $q = p^r$ où $p \geq 2$ est un nombre premier et r est un entier naturel non nul.

A un isomorphisme près, il n'existe qu'un seul corps fini à $q = p^r$ éléments, c'est $\dfrac{\mathbb{F}_p[X]}{(P)}$ où $P \in \mathbb{F}_p[X]$ est irréductible de degré r.

1. Montrer que l'on a :
$$\operatorname{card}(GL(E)) = \prod_{k=1}^{n} \left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left(q^j - 1\right)$$
et :
$$\operatorname{card}(SL(E)) = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=2}^{n} \left(q^j - 1\right)$$
2. Une application originale est donnée par l'exercice suivant bien utile du point de vue social.
31 vacanciers se trouvent sur le même bateau durant le mois de Juillet. La capitaine peut inviter chaque soir 6 personnes à sa table. Peut-il faire ces invitations chaque soir du mois de Juillet de sorte que chaque vacancier se soit rencontré une fois et une seule ?
3. Soient E, F deux $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$.
Montrer que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si, les groupes $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes.
4. Soient $\mathbb{L}$ un corps commutatif et m un entier naturel non nul. Montrer que si les groupes $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $GL_m(\mathbb{L})$ sont isomorphes, $\mathbb{L}$ est alors isomorphe à $\mathbb{F}_q$ et $n = m$.
5. On note :
$$\mu_n(\mathbb{F}_q) = \{z \in \mathbb{F}_q \mid z^n = 1\}$$
l'ensemble des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$.
C'est un sous-groupe cyclique du groupe multiplicatif $\left(\mathbb{F}_q^*, \cdot\right)$.
   (a) En désignant par δ le pgcd de n et $q-1$, montrer que $\mu_n(\mathbb{F}_q) = \mu_\delta(\mathbb{F}_q)$.
   (b) Montrer que :
   $$\operatorname{card}(\mu_n(\mathbb{F}_q)) = n \wedge (q-1)$$
   (c) On note $Z(G)$ le centre d'un groupe G et E est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
   Montrer que l'on a :
   $$\operatorname{card}(Z(GL(E))) = q - 1$$
   et :
   $$\operatorname{card}(Z(SL(E))) = n \wedge (q-1)$$
6. En notant $q = p^r$ avec $p \geq 2$ premier et $r \geq 1$, donner pour $n \geq 2$ un exemple de p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_q)$, puis tous les p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
7. Montrer que, tout groupe fini d'ordre $n \geq 1$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, où $p \geq 2$ est un nombre premier.
8. Rappeler comment le résultat précédent permet de montrer le premier théorème de Sylow : si G est un groupe d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 1$ et p premier ne divisant pas m, il existe alors un p-Sylow de G.

2. choses utiles pour les leçons : corps fini, dénombrement, $GL(E)$

9. [3]On se propose de dénombrer l'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ nilpotentes d'ordre $n \geq 2$.
On note :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On fait agir le groupe $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ par conjugaison :
$$(P, A) \in GL_n(\mathbb{F}_q) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q) \mapsto PAP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$$
   (a) Vérifier que $J \in \mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ est l'orbite de J sous l'action de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
   (c) Montrer que le stabilisateur de J sous l'action de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est :
   $$Stab(J) = GL_n(\mathbb{F}_q) \cap \mathbb{F}_q[J]$$
   où $\mathbb{F}_q[J]$ est l'ensemble des polynômes en J.
   (d) Déduire de ce qui précède que :
   $$\operatorname{card}(\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(q^n - q^{k-1}\right)$$

10. [4]Soit E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
On se propose de dénombrer l'ensemble $DL(E)$ des automorphismes de E qui sont diagonalisables.
   (a) Montrer que :
   $$DL(E) = \left\{u \in GL(E) \mid u^{q-1} = Id\right\}$$
   (b) En notant $\mathbb{F}_q^* = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{q-1}\}$, montrer que :
   $$\forall u \in DL(E),\ E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} \ker(u - \lambda_k Id)$$
   (c) En désignant par $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites $(E_k)_{1 \leq k \leq q-1}$ de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} E_k$, montrer que l'application :
   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & DL(E) & \to & \mathcal{F} \\ & u & \mapsto & (\ker(u - \lambda_k Id))_{1 \leq k \leq q-1} \end{array}$$
   est bijective.
   Il s'agit alors de dénombrer $\mathcal{F}$.

3. idée de court développement pour $GL(E)$, corps finis, actions de groupes et dénombrement d'après un exercice de Gourdon

4. Idée de développement pour $GL(E)$, opérations de groupes, corps finis et dénombrement, d'après un exercice de FGN1 : exercice 1.9 sur le nombre d'involutions de $GL_n(\mathbb{F}_q)$

(d) Pour $(n_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathbb{N}^{q-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} n_k = n$, on note :

$$\mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})} = \left\{(E_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathcal{F} \mid \dim(E_k) = n_k,\ 1 \leq k \leq q-1\right\}$$

Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} GL(E) \times \mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})} & \to & \mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})} \\ (u,(E_1,\cdots,E_{q-1})) & \mapsto & u\cdot(E_1,\cdots,E_{q-1}) = (u(E_1),\cdots,u(E_{q-1})) \end{array}$$

définit une action transitive de $GL(E)$ sur $\mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})}$.

(e) En notant, pour $(n_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathbb{N}^{q-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} n_k = n$ et $(E_k)_{1\leq k\leq q-1}$ fixé dans $\mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})}$:

$$\mathrm{Stab}(E_1,\cdots,E_{q-1}) = \{u \in GL(E) \mid u(E_k) = E_k,\ 1 \leq k \leq q-1\}$$

le stabilisateur de $(E_k)_{1\leq k\leq q-1}$, montrer que :

$$\mathrm{card}(\mathrm{Stab}(E_1,\cdots,E_{q-1})) = \prod_{k=1}^{q-1} \mathrm{card}(GL(E_k))$$

puis que :

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{F}_{(n_1,\cdots,n_{q-1})}\right) = \frac{\mathrm{card}(GL(E))}{\displaystyle\prod_{k=1}^{q-1} \mathrm{card}(GL(E_k))}$$

(f) Déduire de ce qui précède que :

$$\mathrm{card}(DL(E)) = \sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_{q-1})\in\mathbb{N}^{q-1} \\ n_1+\cdots+n_{q-1}=n}} \frac{\mathrm{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))}{\mathrm{card}(GL_{n_1}(\mathbb{F}_q))\cdots\mathrm{card}\left(GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)\right)}$$

avec la convention $\mathrm{card}(GL_0(\mathbb{F}_q)) = 1$.

– IV – Générateurs de $SL(E)$ et de $GL(E)$

E est de dimension finie $n \geq 2$.

Définition 1 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\,a \tag{1}$$

où $a \in \ker(\varphi)$.

Définition 2 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in GL(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\,a \tag{2}$$

où $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

On notera $\tau_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une transvection définie par (1) , où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$ et $\delta_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une dilatation définie par (2) où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \notin \ker(\varphi)$.

Avec notre définition $Id = \tau_{\varphi,0}$ est une transvection (transvection triviale). C'est la définition prise par Ramis-Warusfel, mais pas celle de Perrin où l'identité n'est pas une transvection.

1. **Transvections, définitions équivalentes**
   Montrer que pour $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{Id\}$, les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) u est une transvection.
   (b) Il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et $\mathrm{Im}(u - Id) \subset H$.
   (c) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (avec $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
   (d) Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$
   avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
   (e) $\mathrm{rg}(u - Id) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X-1)^n$.
2. **Quelques propriétés des transvections**
   (a) Montrer qu'une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est un isomorphisme de E, son inverse étant la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, puis que 1 est son unique valeur propre, l'espace propre associé étant $\ker(\varphi)$ si $u \neq Id$.
   (b) Montrer que l'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est un sous groupe commutatif de $GL(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
   (c) Montrer que le polynôme minimal d'une transvection $u \neq Id$ est $(X-1)^2$.
   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ ayant au moins 3 éléments ($\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$), toute transvection différente de Id s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.
   (e) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.
   (f) Montrer que, pour $n \geq 3$, toutes les transvections différentes de Id sont conjuguées dans $SL(E)$.
   Que se passe-t-il pour $n = 2$?
3. **Dilatations, définitions équivalentes**
   Soit $u \in GL(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) u est une dilatation.
   (b) Il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et u est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ (c'est-à-dire que $E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - \lambda Id)$).
   On dit que u est une dilatation de rapport λ (pour $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et $\lambda = -1$, on dit que u est une réflexion d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$).
   (c) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$$
   avec $\lambda = \det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

4. **Quelques propriétés des dilatations**
   (a) Montrer que l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.
   (b) Montrer que le polynôme minimal d'une dilatation de rapport λ est $(X-1)(X-\lambda)$.
   (c) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
   (d) Montrer que deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si, et seulement si, elles ont même rapport.

5. **Générateurs de** $SL(E)$
   On se propose de montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $SL(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.
   (a) Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $a \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$.
      i. Montrer que $H = H_1 \cap H_2 \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E.
      ii. Montrer que $E = H + H_1 = H + H_2$.
      iii. Montrer qu'il existe une transvection u telle que $u(a) = a$ et $u(H_1) = H_2$.
      Indication : pour $a_2 \in H_2 \setminus H$, on justifiera l'existence de $a_1 \in H_1 \setminus H$ et $b \in H$ tels que $a_2 = a_1 + b$, puis on peut considérer la transvection $\tau_{\varphi,b}$ où φ est une équation de H telle que $\varphi(a_1) = 1$.
   (b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans E, il existe $u \in SL(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u(x)$.
   (c) Montrer que le groupe $SL(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.
   Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant les opérations élémentaires sur les matrices.

6. **Générateurs de** $GL(E)$.
   (a) Montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations et des transvections.
   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ ayant au moins trois éléments ($\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$), le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations.
   (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des matrices diagonalisables inversibles.
   (d) Montrer que le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble $TN(E)$ des automorphismes de E de trace nulle.
   Indication : utiliser des matrices de permutation pour $n \geq 3$.

7. **Groupes dérivés de** $GL(E)$ **et de** $SL(E)$
   On rappelle que le groupe dérivé d'un groupe $(G, \cdot)$ est le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire les éléments de G de la forme :
   $$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$
   où a, b sont dans G.
   (a) Montrer que $D(GL(E)) \subset SL(E)$ et $D(SL(E)) \subset SL(E)$.
   (b) Montrer que, pour toute transvection $\tau_{\varphi,a}$ ($\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$), $\tau_{\varphi,a}^2$ est une transvection.
   (c) Pour $n \geq 3$ et $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, déduire du résultat précédent que $D(GL(E)) = SL(E)$ et $D(SL(E)) = SL(E)$.

(d) Pour $n \geq 3$, montrer que $D(GL(E)) = SL(E)$ et $D(SL(E)) = SL(E)$.
Indication : on peut utiliser une représentation matricielle.

(e) Pour $n = 2$ et $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ montrer que $D(GL(E)) = SL(E)$.

(f) Pour $n = 2$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ et $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_3$, montrer que $D(SL(E)) = SL(E)$.
Pour $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, on a $D(SL(E)) \backsimeq \mathcal{A}_3$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, on a $D(SL(E)) \backsimeq \mathbb{H}_8$ (voir Perrin, exercices).

8. **Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ pour $\mathbb{K}$ infini**
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est infini et on se donne un morphisme de groupes γ de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ qui soit une fonction polynomiale des coefficients a_{ij} des matrices $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que pour toute matrice de la dilatation $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, on a $\gamma(D_n(\lambda)) = \lambda^r$.

(b) Montrer que, pour toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{F}_q$, on a $\gamma(T_{ij}(\lambda)) = 1$.

(c) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ \gamma(A) = (\det(A))^r$$

9. **Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ pour $\mathbb{K}$ fini**
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et on se donne un morphisme de groupes γ de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{F}_q^*$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel r compris entre 0 et $q-2$ tel que pour toute matrice de la dilatation $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, on a $\gamma(D_n(\lambda)) = \lambda^r$.

(b) Montrer que, pour toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{F}_q$, on a $\gamma(T_{ij}(\lambda)) = 1$.

(c) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{F}_q),\ \gamma(A) = (\det(A))^r$$

– V – Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Pour cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

1. **Densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$**

(a) Montrer que $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans $GL(E)$.

(b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais fermé dans $GL_n(\mathbb{C})$.

(c) Montrer, en utilisant la densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.

(d) Pour tout entier $n \geq 2$, toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous i, j compris entre 1 et n, on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.
Le scalaire $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice (i,j) et le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ est le

cofacteur d'indice (i,j).
La comatrice de A est la matrice :

$$C(A) = \left(\left((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(C(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

(e) Montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ C(AB) = C(A)C(B)$$

(f) Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors leurs comatrices le sont aussi.

2. **Connexité de** $GL(E)$

   (a) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs.

   (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $SL(E)$ est connexe par arcs.

   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $GL(E)$ n'est pas connexe, puis que ses composantes connexes sont les ouverts de $\mathcal{L}(E)$:

   $$GL^+(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) > 0\} \text{ et } GL_n^-(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) < 0\}$$

   Ce résultat permet de définir une orientation sur un espace vectoriel réel E de dimension n. On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la même orientation si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.

3. **Sous-groupes de** $GL(E)$.

   (a) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Montrer que si G est un sous-groupe borné de $GL(E)$, alors toutes les valeurs propres des éléments de G sont de module égal à 1, puis que tous ses éléments sont diagonalisables.

   (b)

      i. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$, il existe alors un entier naturel p tel que $|1 - \lambda^p| > \sqrt{2}$.

      ii. Montrer que le seul sous-groupe de $GL(E)$ contenu dans la boule de centre Id et de de rayon $\sqrt{2}$ est $\{Id\}$.

4. **Sous-groupes compacts de** $GL(E)$. [5]
   On suppose ici que $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

   (b) Soient $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace euclidien (de dimension finie), H un sous-groupe compact de $GL(V)$ et K un sous-ensemble non vide de V qui est compact, convexe et stable par tous les éléments de H (i. e. $u(K) \subset K$ pour tout $u \in H$).

      i. Montrer que l'application :

      $$\begin{array}{rccc} N : & V & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & N(x) = \sup\limits_{u\in H} \|u(x)\| \end{array}$$

      est une norme strictement convexe sur V (i. e. une norme telle que l'égalité $N(x+y) = N(x) + N(y)$ est réalisée si, et seulement si, x et y sont positivement liés dans V).

5. développement possible pour $GL(E)$, barycentre et convexité, compacité, convexité. D'après Alessandri et Szpirglas

ii. Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in K$ tel que :

$$N(a) = \inf_{x \in K} N(x)$$

iii. Montrer que a est point fixe de tous les éléments de H (i. e. $u(a) = a$ pour tout $u \in H$).

(c) Ici $V = \mathcal{S}(E)$ est l'espace des endomorphismes symétriques de E muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}(E), \ \langle u \mid v \rangle = \mathrm{Tr}(u \circ v)$$

et G est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

i. Montrer que l'image dans $GL(\mathcal{S}(E))$ de G par l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & GL(E) & \to & GL(\mathcal{S}(E)) \\ & u \mapsto & \mapsto & (v \mapsto u \circ v \circ {}^t u) \end{array}$$

est un sous-groupe compact de $GL(S(E))$.

On rappelle le théorème de Carathéodory qui nous dit que dans un espace euclidien l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

ii. Montrer que l'enveloppe convexe K de l'ensemble $C = \{v \circ {}^t v \mid v \in G\}$ un compact de $\mathcal{S}^{++}(E)$ stable par H.

iii. Montrer que G est le conjugué d'un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, c'est-à-dire qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que le sous-groupe $u^{-1}Gu$ est contenu dans $\mathcal{O}(E)$.