Matrices positives et irréductibles

Jean Etienne ROMBALDI

25 novembre 2007

Table des matières

1

Matrices positives et irréductibles

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x = (x_i)_{1\leq i\leq m}$ dans $\mathbb{K}^m$, on note $(Ax)_i$ la composante numéro i du vecteur Ax.

Pour toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on note

$$|A| = ((|a_{i,j}|))_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq m}}.$$

Pour toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $1 \leq p < q \leq n$, on note $A_{p,q} = ((a_{ij}))_{p\leq i,j\leq q}$ une sous-matrice principale de A.

1.1 Rappels sur les normes matricielles et le rayon spectral

On rappelle les résultats suivants (voir [2]).

Pour toute norme $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application :

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

La norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \left\| {}^tA \right\|_\infty.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, alors son rayon spectral est le réel :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|,$$

où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a :

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Quelle que soit la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(\left\| A^k \right\|^{\frac{1}{k}} \right). \tag{1.1}$$

L'application ρ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ (voir [2], théorème 4.15).

1.2 Matrices positives

Définition 1.1 *Une matrice A dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive [resp. strictement positive] et on note $A \geq 0$ [resp. $A > 0$], si tous ses coefficients sont positifs ou nuls [resp. strictement positifs].*

Si A, B sont deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la notation $A \geq B$ [resp. $A > B$, ou $A \leq B$, ou $A < B$] signifie que la matrice $A - B$ est positive [resp. $A - B$ est strictement positive, ou $B - A$ est positive ou $B - A$ est strictement positive].

Remarque 1.1 *En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'entraînent pas $A > 0$.*

Lemme 1.1 *Si $z_1, \cdots, z_n$ sont des nombres complexes tels que :*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{i=1}^{n} |z_k|, \tag{1.2}$$

alors il existe un réel θ tels que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad z_k = |z_k| e^{i\theta}.$$

Démonstration. Si tous les z_k ($1 \leq k \leq n$) sont nuls, alors le résultat est trivial avec n'importe quel réel θ.

On suppose donc qu'il existe au moins un vecteur z_k non nul et on note I l'ensemble des indices k compris entre 1 et n tels que $z_k \neq 0$. Pour tout $k \in I$, chaque z_k peut s'écrire $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ avec $\rho_k = |z_k| > 0$ et $\theta_k \in \left]-\pi, \pi\right]$ et on a :

$$\begin{cases} \left| \sum\limits_{k \in I} z_k \right|^2 = \sum\limits_{k \in I} |z_k|^2 + \sum\limits_{j \neq k} \rho_j \rho_k \cos(\theta_j - \theta_k), \\ \left(\sum\limits_{k \in I} |z_k| \right)^2 = \sum\limits_{k \in I} |z_k|^2 + \sum\limits_{j \neq k} \rho_j \rho_k \end{cases}$$

et l'égalité (1.2) équivaut à :

$$\sum_{j,k \in I,\, j \neq k} \rho_j \rho_k (1 - \cos(\theta_j - \theta_k)) = 0.$$

Tous les termes de cette somme étant positifs ou nuls avec $\rho_j \rho_k > 0$, on en déduit que $\cos(\theta_j - \theta_k) = 1$ pour $j \neq k$ dans I, avec $-\pi < \theta_j - \theta_k \leq \pi$, ce qui équivaut à $\theta_j = \theta_k$. En notant θ cette valeur commune on peut prendre $\theta_k = \theta$ pour les indices k tels que $\rho_k = 0$ et on a alors $z_k = \rho_k e^{i\theta} = |z_k| e^{i\theta}$ pour tout entier k compris entre 1 et n. ■

Avec le résultat qui suit on résume quelques propriétés élémentaires des matrices positives.

Théorème 1.1

(i) *Pour toute matrice* A *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *la matrice* $|A|$ *est positive et* $|A| = 0$ *si et seulement si* $A = 0$.

(ii) *Pour toute matrice* A *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et tout scalaire* λ, *on a* $|\lambda A| = |\lambda| \, |A|$.

(iii) *Pour toutes matrices* A, B *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *on a* $|A + B| \leq |A| + |B|$.

(iv) *Pour toutes matrices* A *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* B *dans* $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, *on a* $|AB| \leq |A| \, |B|$.

(v) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *est positive et* $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$ *strictement positive, alors* $AB = 0$ *entraîne* $A = 0$.

(vi) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *est strictement positive et* $x \in \mathbb{R}^m$ *est positif non nul, alors* Ax *est strictement positif.*

(vii) *Si* A, B *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *et* A', B' *dans* $\mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R})$ *sont telles que* $0 \leq A \leq B$ *et* $0 \leq A' \leq B'$, *alors* $0 \leq AA' \leq BB'$.

($viii$) *Si* A, B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont telles que* $|A| \leq B$, *alors* $\left|A^k\right| \leq |A|^k \leq B^k$ *pour tout entier naturel* k.

(ix) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *strictement positive et* $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ *sont telles que* $|AB| = A\,|B|$, *alors il existe des réels* $\theta_1, \cdots, \theta_r$ *tels que* $B = |B| \, \Delta$, *où* Δ *est la matrice diagonale de termes diagonaux* $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_r}$.

(x) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *est telle qu'il existe un vecteur* x *strictement positif dans* $\mathbb{R}^m$ *tel que* $Ax = |A|\, x$, *alors* $A = |A|$.

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont évidents.

Le point (iii) se déduit des inégalités $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Les inégalités :

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}|$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$, où $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right|$ est coefficient d'indice (i, j) de $|AB|$ et $\sum\limits_{k=1}^{m} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}|$ celui de $|A| \, |B|$, signifient que $|AB| \leq |A| \, |B|$.

L'égalité $AB = 0$ équivaut à :

$$\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$, et pour A, B positives cela équivaut à $a_{i,k} b_{k,j} = 0$ pour tout k compris entre 1 et m, équivalent à $a_{i,k} = 0$ si de plus B est strictement positive, c'est-à-dire que $A = 0$.

Si x est un vecteur positif non nul alors il existe un entier k compris entre 1 et m tel que $x_k > 0$ et pour tout i compris entre 1 et n, on a :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \geq a_{i,k} x_k > 0$$

si la matrice A est strictement positive. On a donc $Ax > 0$ si $0 < A$, $0 \leq x$ et $x \neq 0$.

Si les matrices A et A' sont positives alors la matrice AA' est également positive et en écrivant que :

$$BB' - AA' = B\,(B' - A') + (B - A)\,A',$$

on déduit que si $A \leq B$, $A' \leq B'$, avec A', B positives, alors $AA' \leq BB'$.

L'assertion $(viii)$ se montre facilement par récurrence avec (iv) et (vii).

L'égalité $|AB| = A|B|$ avec A strictement positive équivaut à :

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_{pk} b_{kq} \right| = \sum_{k=1}^{m} a_{pk} |b_{kq}|$$

pour tout p compris entre 1 et n et q compris entre 1 et r. Pour p, q fixés, la suite $(z_k)_{1 \leq k \leq m}$ de nombres complexes définie par $z_k = a_{pk} b_{kq}$ est donc telle que $\left| \sum\limits_{k=1}^{m} z_k \right| = \sum\limits_{k=1}^{m} |z_k|$, ce qui équivaut à l'existence d'un réel θ_{pq} tel que $z_k = e^{i\theta_{pq}} |z_k|$ pour tout k compris entre 1 et m (lemme 1.1). On a donc :

$$a_{pk} b_{kq} = e^{i\theta_{pq}} |a_{pk} b_{kq}| = a_{pk} e^{i\theta_{pq}} |b_{kq}|$$

ce qui avec $a_{pk} > 0$ équivaut à :

$$b_{kq} = e^{i\theta_{pq}} |b_{kq}|.$$

En fixant p et en notant θ_q pour θ_{pq}, cela s'écrit $B = |B| \Delta$, où Δ est la matrice diagonale de termes diagonaux $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_r}$.

Soient $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = |A| x$. On a alors pour tout i compris entre 1 et n :

$$\sum_{j=1}^{m} (|a_{i,j}| - a_{i,j}) x_j = 0$$

et si de plus x est strictement positif, cela équivaut à :

$$|a_{i,j}| = \Re(a_{i,j}), \ \Im(a_{i,j}) = 0,$$

c'est-à-dire à $A = |A|$. ■

Du point $(viii)$ du lemme précédent, on déduit le résultat suivant.

Théorème 1.2 *Si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $|B| \leq A$, alors :*

$$\rho(B) \leq \rho(|B|) \leq \rho(A).$$

Démonstration. Pour $|B| \leq A$, on a $\left|B^k\right| \leq |B|^k \leq A^k$ pour tout $k \geq 1$ et en conséquence :

$$\left\|B^k\right\|_\infty \leq \left\||B|^k\right\|_\infty \leq \left\|A^k\right\|_\infty,$$

soit avec la croissance de $t \mapsto t^{\frac{1}{k}}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall k \geq 1, \quad \left\|B^k\right\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \left\||B|^k\right\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \left\|A^k\right\|_\infty^{\frac{1}{k}}.$$

Il suffit alors de faire tendre k vers l'infini en utilisant l'égalité (1.1). ■

Corollaire 1.1 *Si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leq A \leq B$, alors :*

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

Corollaire 1.2 *Si A est une matrice réelle positive d'ordre n, alors pour toute sous-matrice principale $A_{p,q} = ((a_{ij}))_{p\leq i,j\leq q}$ de A, on a $\rho(A_{p,q}) \leq \rho(A)$.*
En particulier, on a :

$$\max_{1\leq i\leq n} a_{ii} \leq \rho(A).$$

Démonstration. On a :

$$0 \leq B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq A$$

et donc $\rho(B) = \rho(A_{p,q}) \leq \rho(A)$. ■

Remarque 1.2 *Les inégalités $a_{ii} \leq \rho(A)$ ne sont pas nécessairement vérifiées si la matrice A n'est pas positive. Par exemple toute matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a un rayon spectral nul et une telle matrice s'écrit, en notant $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible :*

$$A = P^{-1}JP = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dc & d^2 \\ -c^2 & -dc \end{pmatrix}.$$

En prenant $dc > 0$, on a $a_{11} > \rho(A) = 0$.

Corollaire 1.3 *Si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leq A < B$, alors :*

$$\rho(A) < \rho(B).$$

Démonstration. Si $\rho(A) = 0$, alors $\rho(B) \geq \max\limits_{1\leq i\leq n} b_{ii} > 0$ du fait que B est strictement positive.

Pour tous i, j compris entre 1 et n, on a $0 \leq \dfrac{a_{ij}}{b_{ij}} < 1$, on peut donc trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{a_{ij}}{b_{ij}} < \lambda < 1$, soit $\dfrac{1}{\lambda}a_{ij} < b_{ij}$. On a donc $0 \leq \dfrac{1}{\lambda}A < B$ et $\rho\left(\dfrac{1}{\lambda}A\right) \leq \rho(B)$ ce qui entraîne pour $\rho(A) > 0$:

$$\rho(A) < \frac{1}{\lambda}\rho(A) = \rho\left(\frac{1}{\lambda}A\right) \leq \rho(B),$$

et donc $\rho(A) < \rho(B)$. ■

Théorème 1.3 *Soit A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne [resp. colonne] est constante égale à α. Le réel α est alors une valeur propre de A et :*

$$\rho(A) = \alpha = \|A\|_\infty \quad \text{[resp. } \rho(A) = \alpha = \|A\|_1 \text{]}$$

Démonstration. Les égalités $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha$ pour tout i compris entre 1 et n reviennent à dire que le vecteur $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre α. La matrice A et le réel α étant positifs, on a alors :

$$\alpha \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha,$$

soit $\alpha = \rho(A) = \|A\|_\infty$.

En raisonnant avec la transposée de la matrice A et en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont mêmes valeurs propres, on obtient le deuxième résultat en considérant que $\|{}^tA\|_\infty = \|A\|_1$. ■

Corollaire 1.4 *Pour toute matrice positive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$\inf_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right) \leq \rho(A) \leq \sup_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right),$$
$$\inf_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right) \leq \rho(A) \leq \sup_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right).$$

Démonstration. Pour tout i compris entre 1 et n, on note $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}$ et :

$$\alpha = \inf_{1\leq i\leq n}(\alpha_i), \quad \beta = \sup_{1\leq i\leq n}(\alpha_i).$$

On montre tout d'abord qu'on peut construire une matrice $B = ((b_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq B \leq A$ et :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} = \alpha.$$

Si $\alpha = 0$, en prenant $B = 0$, on a bien $0 \leq B \leq A$ et $\sum\limits_{j=1}^n b_{ij} = 0 = \alpha$ pour tout i compris entre 1 et n.

Si $\alpha = \inf\limits_{1\leq i\leq n}(\alpha_i) > 0$, alors tous les α_i sont strictement positifs et en posant :

$$b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i}a_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

on a $0 \leq b_{ij} \leq a_{ij}$ pour tous i, j compris entre 1 et n, soit $0 \leq B \leq A$ et pour tout i compris entre 1 et n :

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i}\sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha.$$

On en déduit alors que

$$\alpha = \rho(B) \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty = \beta.$$

En raisonnant avec ${}^tA$, considérant que $\rho({}^tA) = \rho(A)$ et $\|{}^tA\|_\infty = \|A\|_1$, on obtient le deuxième encadrement. ■

Corollaire 1.5 *Si A est une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} > 0$ [resp. $\sum\limits_{i=1}^n a_{ij} > 0$] pour tout i [resp. j] compris entre 1 et n, alors $\rho(A) > 0$.*
En particulier une matrice strictement positive a son rayon spectral strictement positif.

Remarque 1.3 *Si $\rho(A) = 0$, alors toutes les valeurs propres de A sont nulles et la trace de A qui est la somme des valeurs propres est également nulle. Pour A strictement positive, on a donc $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii} > 0$ et $\rho(A) > 0$.*

Corollaire 1.6 *Si A est une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^k soit strictement positive pour un entier $k \geq 1$, alors $\rho(A) > 0$.*

Démonstration. Du théorème de trigonalisation des matrices complexes, on déduit que $\rho\left(A^k\right) = (\rho(A))^k$, puis $A^k > 0$ donne $\rho\left(A^k\right) > 0$ et $\rho(A) > 0$.
■

Théorème 1.4 *Pour toute matrice positive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur x strictement positif dans $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Démonstration. On note :

$$r(A, x) = \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \quad s(A, x) = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

On désigne par D_x la matrice diagonale de termes diagonaux $x_1, \cdots, x_n$ et on utilise le corollaire 1.4 avec la matrice positive $D_x^{-1} A D_x$. La multiplication à droite par D_x a pour effet de multiplier chaque colonne j de la matrice A par x_j et la multiplication à gauche par D_x^{-1} a pour effet de diviser chaque ligne i de la matrice A par x_i, de sorte que :

$$D_x^{-1} A D_x = \left(\frac{x_j}{x_i} a_{ij}\right),$$

ce qui entraîne :

$$r(A, x) = \inf_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \leq \rho\left(D_x^{-1} A D_x\right) = \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} a_{ij} = s(A, x).$$

■

Remarque 1.4 *On a aussi :*

$$\inf_{1 \leq j \leq n} x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq j \leq n} x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{x_i}.$$

Corollaire 1.7 *Soit A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si il existe un vecteur x strictement positif et deux constantes réelles positives ou nulles α, β telles que $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ [resp. $\alpha x < Ax < \beta x$], alors $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ [Resp. $\alpha < \rho(A) < \beta$].*

Démonstration. L'inégalité $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ équivaut à $\alpha x_i \leq (Ax)_i \leq \beta x_i$ pour tout i compris entre 1 et n, ce qui entraîne :

$$\alpha \leq \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \beta.$$

On procède de même pour les inégalités strictes. ■

Corollaire 1.8 *Soit A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si la matrice A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :*

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \sup_{x>0} \inf_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \\ &= \inf_{x>0} \sup_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.\end{aligned}$$

Démonstration. On note, pour tout vecteur x strictement positif :

$$r(A,x) = \inf_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}, \quad s(A,x) = \sup_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

et on a $r(A,x) \leq \rho(A) \leq s(A,x)$ (théorème 1.4), ce qui entraîne l'existence de $\sup\limits_{x>0} \inf\limits_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$ et $\inf\limits_{x>0} \sup\limits_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$.

Si, de plus x est un vecteur propre strictement positif de A, alors la valeur propre α associée est réelle positive et avec :

$$\alpha = \inf_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \alpha,$$

on déduit que $\alpha = \rho(A) = \sup\limits_{x>0} \inf\limits_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \inf\limits_{x>0} \sup\limits_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$. ∎

1.3 Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobénius

Lemme 1.2 *Soit A une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si x est un vecteur propre non nul de A associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors $\rho(A)$ est valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé. Le vecteur $|x|$ est strictement positif et il existe un réel θ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.*

Démonstration. On a $\rho(A) > 0$ du fait que $A > 0$.
De $Ax = \lambda x$ avec $|\lambda| = \rho(A)$, on déduit que :

$$\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|, \tag{1.3}$$

ce qui entraîne que le vecteur $y = A|x| - \rho(A)|x|$ est positif. Si ce vecteur est non nul, alors $Ay > 0$ (point (vi) du théorème 1.1), ce qui signifie en notant $z = A|x|$ que $\rho(A)z < Az$ avec $z > 0$ (le vecteur x est non nul) qui entraîne $\rho(A) < \rho(A)$ (corollaire 1.7), soit une impossibilité. On a donc $y = 0$, c'est-à-dire $A|x| = \rho(A)|x|$, ce qui signifie que $\rho(A)$ est valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé. De plus avec $|x| = \frac{1}{\rho(A)} A|x|$, on déduit que $|x| > 0$.

Enfin de (1.3), on déduit que $A|x| = |Ax|$ et donc qu'il existe un réel θ tel que $x = e^{i\theta}|x|$ (point (ix) du théorème 1.1 avec $B = x$). ∎

Théorème 1.5 (Perron-Frobenius) *Si A est une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif.*

Démonstration. Dans la démonstration du lemme précédent on a vu que si λ est une valeur propre de la matrice A telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et si x est un vecteur propre non nul associé, alors $x = e^{i\theta}|x|$ avec $A|x| = \rho(A)|x|$. Le rayon spectral $\rho(A)$ est donc valeur propre de A. De plus, avec :

$$\lambda x = Ax = A\left(e^{i\theta}|x|\right) = e^{i\theta}A|x| = e^{i\theta}\rho(A)|x| = \rho(A)x,$$

on déduit que $\lambda x = \rho(A)x$ avec $x \neq 0$, et $\lambda = \rho(A)$. Donc $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

En notant $E_{\rho(A)}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$, tout vecteur non nul x dans $E_{\rho(A)}$ est tel que $|x| > 0$ et aucune des composantes de x n'est nulle. S'il existe deux vecteurs x, y linéairement indépendants dans $E_{\rho(A)}$, alors le vecteur $z = x_1 y - y_1 x$ est non nul dans $E_{\rho(A)}$ avec $z_1 = 0$, ce qui est impossible. On a donc $\dim\left(E_{\rho(A)}\right) = 1$. ■

Corollaire 1.9 *Si A est une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors il existe une unique vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ dans le compact $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \|x\|_1 = 1\}$.*

Démonstration. On a vu que $E_{\rho(A)} = \mathbb{R}x$ avec $x > 0$. Le vecteur $v = \dfrac{1}{\|x\|_1}x$ est alors l'unique élément de $F \cap E_{\rho(A)}$. ■

Le vecteur $x \in F \cap E_{\rho(A)}$ est appelé, le vecteur de Perron de la matrice strictement positive A.

En utilisant la densité de l'ensemble des matrices strictement positives dans l'ensemble des matrices positives, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 1.10 *Si A est une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est valeur propre de A et il existe un vecteur propre associé non nul positif.*

Démonstration. Pour tout entier naturel non nul k, on pose :

$$A_k = \left(\left(a_{ij} + \frac{1}{k}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

et on désigne par x_k le vecteur de Perron de la matrice strictement positive A_k. On a $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$ et avec la continuité du rayon spectral, on déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} \rho(A_k) = \rho(A)$. D'autre part, la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ étant dans le compact F, on peut en extraire une sous suite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k \geq 1}$ convergente vers un vecteur $x \geq 0$ et on a :

$$Ax = \lim_{k \to +\infty} A_{\varphi(k)} x_{\varphi(k)} = \lim_{k \to +\infty} \rho\left(A_{\varphi(k)}\right) x_{\varphi(k)} = \rho(A)x,$$

c'est-à-dire que x est un vecteur propre non nul (puisque $\|x\|_1 = 1$) positif de A associé à la valeur propre $\rho(A)$. ■

Corollaire 1.11 *Si A est une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :*

$$\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A).$$

Démonstration. Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\operatorname{Sp}(I_n + A) = \{1 + \lambda \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$$

et donc $\rho(I_n + A) \leq 1 + \rho(A)$.

Si de plus A est positive, alors $\rho(A)$ est valeur propre de A, donc $1+\rho(A)$ est valeur propre de $I_n + A$ et $1+\rho(A) \leq \rho(I_n + A)$, d'où l'égalité. ■

Le théorème de Perron-Frobénius associé au théorème de Gerschgörin et Hadamard (voir [2], théorème 2.35), nous permet d'obtenir le résultat suivant de localisation des valeurs propres d'une matrice.

Pour tout nombre complexe a et tout réel positif r, on note :

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$$

le disque fermé de centre a et de rayon r.

Corollaire 1.12 *Soient A une matrice complexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $|A| \leq B$. Toutes les valeurs propres de A sont dans la réunion des disques de centre a_{ii} et de rayon $\rho(B) - b_{ii}$, soit :*

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{ii}, \rho(B) - b_{ii}).$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que la matrice B soit strictement positive.

Si x est le vecteur de Perron de B, alors pour tout entier i compris entre 1 et n, on a :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| x_j \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_{ij} x_j = (\rho(B) - b_{ii}) x_i,$$

soit :

$$\frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| x_j \leq \rho(B) - b_{ii}.$$

D'autre part, le théorème de Gerschgörin-Hadamard nous dit que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice C, alors il existe un indice i compris entre 1 et n tel que $|\lambda - c_{ii}| \leq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |c_{ij}|$.

La matrice A ayant les mêmes valeurs propres que la matrice $C_x = D_x^{-1} A D_x$, où D_x est la matrice diagonale de termes diagonaux $x_1, \cdots, x_n$ (c'est-à-dire que $C_x = \left(\left(\frac{x_j}{x_i} a_{ij}\right)\right)$), on déduit que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe un indice i tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - c_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |c_{ij}| = \frac{1}{x_i} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| x_j \leq \rho(B) - b_{ii},$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Si la matrice B est positive, non strictement positive, on désigne pour tout réel $\varepsilon > 0$ par B_ε la matrice $B_\varepsilon = ((b_{ij} + \varepsilon))$ et on a $B_\varepsilon > A$, donc :

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{ii}, \rho(B_\varepsilon) - b_{ii} - \varepsilon).$$

Avec la continuité du rayon spectral, on en déduit alors le résultat. ■

Du théorème de Perron-Frobénius on déduit également le résultat suivant.

Corollaire 1.13 *Une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne peut avoir deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit y un vecteur propre positif non nul associé à une valeur propre λ de A.

On a $Ay > 0$ et il existe un indice i compris entre 1 et n tel que $(Ay)_i = \lambda y_i$ avec $y_i > 0$, ce qui entraîne que $\lambda > 0$ et $y = \frac{1}{\lambda} Ay > 0$.

Du corollaire 1.8, on déduit que nécessairement $\lambda = \rho(A)$ et le théorème de Perron-Frobénius nous permet alors de conclure. ■

Lemme 1.3 *Soit A une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si x est un vecteur propre strictement positif de A associé à la valeur propre $\rho(A)$, alors il existe alors un unique vecteur y strictement positif qui est vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho({}^tA) = \rho(A)$ tel que ${}^tyx = 1$.*

Démonstration. La matrice ${}^tA$ est strictement positive avec $\rho({}^tA) = \rho(A)$, l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ de ${}^tA$ est donc une droite vectorielle dirigée par un vecteur $z > 0$. En posant $y = \frac{1}{{}^tzx} z$, on a $y > 0$, ${}^tAy = \rho(A)\, y$ et ${}^tyx = 1$.

Réciproquement, si ${}^tAy = \rho(A)\, y$ avec $y > 0$, ${}^tyx = 1$, alors $y = \alpha z$ avec $\alpha = \frac{1}{{}^tzx}$, ce qui prouve l'unicité du vecteur y. ■

Avec les notations et hypothèses du lemme précédent, on désigne par L la matrice d'ordre n définie par :

$$L = x\,{}^ty = ((x_i y_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On désigne par $E_{\rho(A)}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ de A (matrice strictement positive) et par $E'_{\rho(A)}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho({}^tA) = \rho(A)$ de ${}^tA$.

Avec le lemme qui suit, on résume quelques propriétés de cette matrice L.

Lemme 1.4 (i) *La matrice L est indépendante du choix du vecteur x.*
(ii) *La matrice L est strictement positive de rang* 1.
(iii) $Lx = x$, ${}^tLy = y$.
(iv) *Pour tout entier naturel k non nul, on a :*

$$L^k = L,\ A^k L = LA^k = \rho(A)^k L,\ \left(\frac{1}{\rho(A)} A - L\right)^k = \left(\frac{1}{\rho(A)} A\right)^k - L.$$

(v) *L est la matrice de la projection sur la droite vectorielle $E_{\rho(A)}$ parallèlement à l'hyperplan :*

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid {}^tyz = 0 \right\}.$$

Démonstration. (i) On a $E_{\rho(A)} = \mathbb{C}x$, $E'_{\rho(A)} = \mathbb{C}y$, avec $x > 0$, $y > 0$ et ${}^tyx = 1$.

Si (x', y') est un autre couple de vecteurs vérifiant ces propriétés, alors $x' = \alpha x$, $y' = \beta y$, avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 = {}^ty'x' = \alpha\beta\,{}^tyx = \alpha\beta$ et :

$$x'\,{}^ty' = \alpha\beta x\,{}^ty = x\,{}^ty = L.$$

(ii) Les vecteurs x et y étant strictement positifs, il en est de même de la matrice L. De plus, pour j compris entre 1 et n, la colonne numéro j de L est $y_j x > 0$, il en résulte que L est de rang 1 avec $\operatorname{Im}(L) = \mathbb{C}x = E_{\rho(A)}$.

(*iii*) Avec l'associativité du produit matriciel, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Lx &= x \left({}^t yx \right) = \left({}^t yx \right) x = x \\ {}^t Ly &= y \left({}^t xy \right) = \left({}^t xy \right) y = {}^t \left({}^t yx \right) y = y. \end{aligned}$$

(*iv*) On a $L^2 = x \left({}^t yx \right) {}^t y = \left({}^t yx \right) \left(x \, {}^t y \right) = L$ et par récurrence $L^k = L$ pour tout $k \geq 1$. De $Ax = \rho(A) x$, on déduit que $A^k x = \rho(A)^k x$ pour tout $k \geq 1$ et :

$$A^k L = A^k x \, {}^t y = \rho(A)^k x \, {}^t y = \rho(A)^k L.$$

De même avec ${}^t Ay = \rho(A) y$, on obtient :

$$LA^k = x \, {}^t y A^k = x \, {}^t \left(\left({}^t A \right)^k y \right) = x \, {}^t \left(\rho(A)^k y \right) = \rho(A)^k L.$$

La dernière relation peut se montrer par récurrence sur $k \geq 1$. Le résultat est évident pour $k = 1$ et en le supposant acquis pour $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho(A)} A - L \right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{\rho(A)} A - L \right) \left(\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k - L \right) \\ &= \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - \frac{1}{\rho(A)^k} LA^k - \frac{1}{\rho(A)} AL + L^2 \\ &= \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - \frac{1}{\rho(A)^k} \rho(A)^k L - \frac{1}{\rho(A)} \rho(A) L + L \\ &= \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^{k+1} - L. \end{aligned}$$

(*v*) On a $L^2 = L$, $\mathrm{Im}(L) = E_{\rho(A)}$ et le noyau de L est donné par :

$$\mathrm{Ker}(L) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid x \, {}^t yz = 0 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \left({}^t yz \right) x = 0 \right\} = H,$$

c'est-à-dire que L est la projection sur $E_{\rho(A)}$ parallèlement à H. ■

Théorème 1.6 *Avec les notations et hypothèses du lemme 1.3, on a :*

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k = L = x \, {}^t y.$$

Démonstration. Avec $\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k - L = \left(\frac{1}{\rho(A)} A - L \right)^k$ pour $k \geq 1$, il suffit de montrer que la matrice $\frac{1}{\rho(A)} A - L$ a un rayon spectral strictement inférieur à 1, ce qui revient à dire que $\rho(A - \rho(A) L) < \rho(A)$.

Si λ est un valeur propre non nulle de $B = A - \rho(A) L$ et z est un vecteur propre non nul associé, alors $(A - \rho(A) L) z = \lambda z$ et avec $L(A - \rho(A) L) = 0$, on déduit que $\lambda Lz = 0$ et $Lz = 0$ pour $\lambda \neq 0$, ce qui entraîne :

$$\lambda z = Az - \rho(A) Lz = Az,$$

c'est-à-dire que λ est valeur propre de A avec z pour vecteur propre associé. On a donc montré que toute valeur propre λ non nulle de B est aussi valeur propre de A et donc $|\lambda| \leq \rho(A)$.

Si λ est une valeur propre non nulle de B telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors $\lambda = \rho(A)$ (Perron-Frobénius) et tout vecteur propre associé z est aussi vecteur propre de A, on a donc $z = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ pour $z \neq 0$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \rho(A) z &= (A - \rho(A) L) z = (A - \rho(A) L) \alpha x \\ &= \alpha A x - \alpha \rho(A) L x = \alpha \rho(A) x - \alpha \rho(A) x = 0 \end{aligned}$$

en contradiction avec $\rho(A) > 0$ et $z \neq 0$.

On a donc $|\lambda| < \rho(A)$ pour toute valeur propre de B et $\rho(B) < \rho(A)$. D'où le résultat. ■

Remarque 1.5 *Avec ce résultat, on retrouve le fait que la matrice L ne dépend que de la matrice strictement positive A et pas du choix de x.*

On est maintenant en mesure de préciser le théorème de Perron-Frobénius.

Théorème 1.7 (Perron-Frobénius) *Si A est une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et cette valeur propre est simple (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).*

Démonstration. On sait déjà que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum. Notons p sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ nous dit qu'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1} A P$ soit triangulaire supérieure de diagonale :

$$(\rho(A), \cdots, \rho(A), \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n)$$

avec $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour i compris entre $p+1$ et n (si $p < n$). En écrivant, pour tout entier naturel non nul k, que :

$$\left(\frac{1}{\rho(A)} T\right)^k = P^{-1} \left(\frac{1}{\rho(A)} A\right)^k P$$

et en utilisant la continuité du produit matriciel, on déduit du théorème précédent que :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} T\right)^k = P^{-1} L P = L',$$

avec L' triangulaire supérieure de diagonale $(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$.

On a donc $\operatorname{rang}(L') \geq p$ et avec $\operatorname{rang}(L') = \operatorname{rang}(L) = 1$, on déduit que nécessairement $p = 1$. ■

Si la matrice A est positive, on a vu que $\rho(A)$ est valeur propre de A, mais cette valeur propre n'est pas nécessairement simple (prendre par exemple la matrice identité). Mais s'il existe un entier naturel r tel que A^r soit strictement positive, alors $\rho(A)$ est valeur propre simple de A.

Corollaire 1.14 *Si A est une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe un entier naturel r tel que A^r soit strictement positive, alors $\rho(A)$ est valeur propre simple de A (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).*

Démonstration. On sait déjà que $\rho(A)$ est valeur propre de A (corollaire 1.10). Notons p sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ nous dit qu'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1} A P$ soit triangulaire supérieure de diagonale :

$$(\rho(A), \cdots, \rho(A), \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n)$$

avec $|\lambda_i| \leq \rho(A)$ pour tout entier i compris entre $p+1$ et n (si $p < n$). La matrice $T^p = P^{-1}A^pP$ est alors triangulaire supérieure de diagonale :

$$\left(\rho(A)^p, \cdots, \rho(A)^p, \lambda_{p+1}^p, \cdots, \lambda_n^p\right)$$

et $\rho(A)^p = \rho(A^p)$ est alors valeur propre de A^p de multiplicité supérieure ou égale à p. Mais A^p étant strictement positive cette multiplicité vaut 1, on a donc $p = 1$. ■

Une matrice vérifiant les hypothèses du corollaire est un cas particulier de matrice positive irréductible.

1.4 Matrices de permutation

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ et par $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker ($\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$).

Définition 1.2 *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de permutation associée à σ, la matrice de passage P_σ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = \left\{e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right\}$.*

On a donc, si P_σ est une matrice de permutation, $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ pour tout entier j compris entre 1 et n, ce qui revient à dire que :

$$P_\sigma = \left(\left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

En particulier, on a $P_{I_d} = I_n$.

Une telle matrice de permutation étant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base orthonormée est unitaire et donc $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$.

De plus il est facile de vérifier que pour toutes permutations σ, τ dans $\mathfrak{S}_n$, on a $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$ (il suffit d'écrire que pour tout i compris entre 1 et n, on a $P_\sigma P_\tau e_i = P_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma\circ\tau(i)} = P_{\sigma\circ\tau}e_i$). On en déduit alors que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$P_\sigma^{-1}x = \sum_{j=1}^n x_j e_{\sigma^{-1}(j)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}e_i$$

en faisant le changement d'indice $i = \sigma^{-1}(j)$.

C'est-à-dire que $P_\sigma^{-1}x = \left(x_{\sigma(i)}\right)_{1\leq i\leq n}$ se déduit de x en faisant agir la permutation σ sur les composantes de x.

On en déduit alors que pour toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma^{-1}A = \left(\left(a_{\sigma(i),j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

se déduit de A en faisant agir la permutation σ sur les lignes de A.

La multiplication à droite d'une matrice A par une matrice de permutation P_σ va faire agir la permutation σ sur les colonnes de A. En effet, pour tout j compris entre 1 et n, on a :

$$AP_\sigma e_j = Ae_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(j)}e_i$$

et donc $AP_\sigma = \left((a_{i,\sigma(j)})\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

On a donc pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \left((a_{\sigma(i),\sigma(j)})\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

c'est-à-dire que $P_\sigma^{-1}AP_\sigma$ se déduit de A en faisant agir la permutation σ sur les lignes et les colonnes de A.

Remarque 1.6 *Une matrice de permutation étant unitaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Mais sur $\mathbb{R}$ ce résultat n'est plus valable. En effet si σ est un cycle d'ordre 3, alors P_σ a pour polynôme minimale $X^3 - 1$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

1.5 Matrices irréductibles

Définition 1.3 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P_σ telle que :*

$$P_\sigma^{-1}AP_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $1 \leq p \leq n-1$.
Une matrice non réductible est dite irréductible.

Exemple 1.1 *Une matrice ayant tous ses coefficients non nuls est irréductible.*

Exemple 1.2 *Une matrice ayant une ligne (ou une colonne) nulle est réductible. En effet si la ligne numéro i est nulle en transposant la ligne 1 avec la ligne i et la colonne 1 avec la colonne i, on obtient une matrice avec la première ligne nulle.*

Exemple 1.3 *Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est irréductible si et seulement si $bc \neq 0$.*
En effet $\mathfrak{S}_2 = \{\tau_{12}, I_d\}$ et $P_{I_d}^{-1}AP_{I_d} = A$ ou $P_{\tau_{12}}^{-1}AP_{\tau_{12}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est de la forme (1.4) si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$.

Une condition suffisante d'irréductibilité est donnée par le résultat suivant.

Lemme 1.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un entier naturel p tel que A^p ait tous ses coefficients non nuls, alors A est irréductible.*

Démonstration. Si A est réductible, il existe alors une matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1}AP_\sigma$ soit de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ et pour tout entier $p \geq 1$ on a $P_\sigma^{-1}A^pP_\sigma = \begin{pmatrix} B^p & 0 \\ C_p & D^p \end{pmatrix}$, ce qui signifie que la matrice A^p est également réductible, elle a donc au moins un coefficient nul. ■

Exemple 1.4 *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est irréductible puisque $A^2 > 0$.*

Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une définition équivalente de la notion de matrice réductible est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.8 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible si et seulement si il existe une partition non triviale (I, J) de $\{1, \cdots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ réductible. Il existe une permutation σ telle que $a_{\sigma(i),\sigma(j)} = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et $p + 1 \leq j \leq n$, où p est un entier compris entre 1 et $n - 1$. En posant $I = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(p)\}$, $J = \{\sigma(p+1), \cdots, \sigma(n)\}$, on définit une partition non triviale de $\{1, \cdots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Réciproquement supposons qu'il existe une partition non triviale (I, J) de $\{1, \cdots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. En notant p le cardinal de I, on a $1 \leq p \leq n-1$ et il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $I = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(p)\}$, $J = \{\sigma(p+1), \cdots, \sigma(n)\}$, ce qui donne :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \left(\left(a_{\sigma(i),\sigma(j)}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que A est réductible. ■

De ce théorème, on peut déduire qu'une matrice est irréductible si et seulement si sa transposée l'est.

Une autre définition équivalente de la notion de matrice réductible est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.9 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible si et seulement si il existe une partie non triviale J de $\{1, \cdots, n\}$ telle que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $V_J = \mathrm{Vect}\{e_j \mid j \in J\}$, soit stable par A.*

Démonstration. Dire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible équivaut à dire qu'il existe une partition non triviale (I, J) de $\{1, \cdots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$, ce qui revient à dire que pour tout $j \in J$ on a :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i \in J} a_{ij} e_i \in V_J,$$

encore équivalent à dire que V_J est stable par A. ■

Les propriétés élémentaires suivantes nous seront utiles.

Lemme 1.6 *Si A est réductible, alors $|A|$ et $I_n + A$ sont réductibles.*

Démonstration. Cela résulte de $P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ entraîne :

$$\begin{cases} P_\sigma^{-1} |A| P_\sigma = \begin{pmatrix} |B| & 0 \\ |C| & |D| \end{pmatrix}, \\ P_\sigma^{-1} (I_n + A) P_\sigma = \begin{pmatrix} I_p + B & 0 \\ C & I_{n-p} + D \end{pmatrix}. \end{cases}$$

puisque l'action de P_σ est seulement de permuter des lignes et des colonnes. ■

On a vu que si A est une matrice strictement positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum, que cette valeur propre est simple, que l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif et qu'une telle matrice ne peut avoir deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.

Ces résultats ne s'étendent pas au cas des matrices positives. Mais pour les matrices positives qui sont de plus irréductibles, on a des résultats analogues.

Lemme 1.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive et irréductible. Si $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur positif non nul, alors soit y est strictement positif et il en est de même du vecteur $z = (I_n + A)\,y$, soit y a au moins une composante nulle et le nombre de coordonnées nulles de z est strictement inférieur au nombre de coordonnées nulles de y. Dans tous les cas, le vecteur $(I_n + A)^{n-1}\,y$ est strictement positif.*

Démonstration. Les composantes du vecteur $z = (I_n + A)\,y$ sont données par :

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + y_i \quad (1 \leq i \leq n)\,.$$

Si la matrice A et le vecteur y sont positifs, on a alors $z_i \geq y_i \geq 0$ et z est positif.

Avec $z \geq y$, on déduit que z est strictement positif si y l'est.

En supposant que y a au moins une composante nulle, de $0 \leq y_i \leq z_i$, on déduit que $z_i = 0$ entraîne $y_i = 0$. Le nombre de coordonnées nulles du vecteur z est donc inférieur ou égal à celui de y.

Supposons que z et y ont le même nombre de composantes nulles. En notant J_y l'ensembles des indices compris entre 1 et n tels que $y_i = 0$, on a $z_i > 0$ pour $i \notin J_y$ et en conséquence $z_i = y_i = 0$ pour tout $i \in J_y$, avec $z_i = \sum\limits_{j \notin I_y} a_{ij} y_j$ et $y_j > 0$ pour $j \notin J_y$. On a donc en tenant compte du fait que les coefficients a_{ij} sont positifs ou nuls, $a_{ij} = 0$ pour $i \in J_y$ et $j \notin J_y$ avec J_y de cardinal compris entre 1 et $n-1$ (y a au moins une composante nulle et n'est pas le vecteur nul) ce qui revient à dire que la matrice A est réductible. En conclusion le nombre de composantes nulles de z est strictement inférieur à celui de y, si la matrice positive A est irréductible.

Si le vecteur y est positif non nul, il a alors au moins une coordonnée strictement positive et ce qui précède nous dit que le vecteur $(I_n + A)\,y$ a au moins deux coordonnées strictement positives. Par récurrence on déduit alors que le vecteur $(I_n + A)^{n-1}\,y$ a au moins n coordonnées strictement positives, ce qui revient à dire qu'il est strictement positif. ■

Théorème 1.10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive. Cette matrice est irréductible si et seulement si la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.*

Démonstration. Du lemme 1.7, on déduit que si A est une matrice positive irréductible, alors pour tout j compris entre 1 et n le vecteur $(I_n + A)^{n-1}\,e_j$ est strictement positif, ce qui équivaut à dire que la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

Réciproquement si la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive, alors elle est irréductible ainsi que A (lemme 1.6). ■

Remarque 1.7 *On peut en fait montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est irréductible si et seulement si $(I_n + |A|)^{n-1}$ est strictement positive (voir [1], théorème 6.2.23).*

Théorème 1.11 (Perron-Frobenius) *Si A est positive et irréductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est strictement positif, c'est une valeur propre simple de A et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif.*

Démonstration. La matrice A étant irréductible n'a pas de ligne nulle, on a donc puisqu'elle est positive $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ pour tout i compris entre 1 et n, ce qui entraîne $\rho(A) > 0$ (corollaire 1.5).

Avec le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ on voit que si $\rho(A)$ est valeur propre de multiplicité supérieure ou égal à 2 alors il en est de même de $1+\rho(A)$ comme valeur propre de $I_n + A$. Mais $I_n + A$ positive et $(I_n + A)^{n-1}$ strictement positive entraîne $\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A)$ (corollaire 1.11) est valeur propre simple de $I_n + A$ (corollaire 1.14). En conséquence $\rho(A)$ est valeur propre simple de A.

L'espace propre associé est donc de dimension 1 et on sait qu'il peut être engendré par un vecteur positif x (corollaire 1.10). De $Ax = \rho(A)x$, on déduit que $(I_n + A)^{n-1}x = (1 + \rho(A))^{n-1}x$ et avec $(I_n + A)^{n-1}x > 0$ (théorème 1.1, point (vi)), $(1 + \rho(A))^{n-1} > 0$, on déduit que $x > 0$. ■

Théorème 1.12 *Une matrice carrée positive irréductible ne peut pas posséder deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive et irréductible. On sait déjà qu'une telle matrice possède un vecteur propre positif associé à la valeur propre $\rho(A)$.

Si x est un vecteur propre positif non nul associé à une valeur propre λ de A, il existe alors un indice i compris entre 1 et n tel que $(Ax)_i = \lambda x_i$ avec $x_i > 0$ et $(Ax)_i \geq 0$, ce qui entraîne que $\lambda \geq 0$. On a aussi $(I + A)^{n-1}x = (1 + \lambda)^{n-1}x$, avec $(I + A)^{n-1}x > 0$ (puisque $(I + A)^{n-1} > 0$ et $x \geq 0$ non nul) et $(1 + \lambda)^{n-1} > 0$, ce qui entraîne $x > 0$.

En définitive un vecteur propre positif non nul de A est nécessairement strictement positif.

Si x et y sont deux vecteurs propres non nuls de A associés aux valeurs propres respectives λ et μ, alors $x > 0$, $y > 0$, $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$. Supposons $\lambda \leq \mu$.

En posant $\alpha = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{x_i}$, on a $\alpha x - y \geq 0$ et il existe un indice i compris entre 1 et n tel que $\alpha x_i - y_i = 0$. Si $\alpha x - y$ est non nul, alors $(I + A)^{n-1}(\alpha x - y) > 0$, soit $\alpha(1 + \lambda)^{n-1}x > (1 + \mu)^{n-1}y$ et en particulier $\alpha(1 + \lambda)^{n-1}x_i > (1 + \mu)^{n-1}y_i$, avec $\alpha x_i = y_i > 0$, ce qui entraîne $(1 + \lambda)^{n-1} > (1 + \mu)^{n-1}$ en contradiction avec $\lambda \leq \mu$. On a donc $\alpha x = y$, c'est-à-dire que les vecteurs x et y sont liés et $\lambda = \mu$. ■

On a vu (théorème 1.2) que si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $|B| \leq A$, alors $\rho(B) \leq \rho(|B|) \leq \rho(A)$. Avec le théorème qui suit on s'intéresse au cas d'égalité $\rho(B) = \rho(A)$.

Lemme 1.8 *Soit A une matrice positive et irréductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si x est un vecteur propre positif non nul tel que $\rho(A)x \leq Ax$, alors $Ax = \rho(A)x$ et x est strictement positif.*

Démonstration. Si la matrice A est positive irréductible, il en est alors de même de sa transposée et le théorème de Perron-Frobénius nous assure l'existence d'un vecteur strictement positif y tel que ${}^tAy = \rho(A)y$ et pour tout vecteur x dans $\mathbb{R}^n$, on a ;

$$ {}^ty(Ax - \rho(A)x) = \rho(A)\,{}^tyx - \rho(A)\,{}^tyx = 0. $$

Si de plus on suppose $\rho(A)x \leq Ax$, on a ${}^ty(Ax - \rho(A)x) = 0$ avec ${}^ty > 0$ et $Ax - \rho(A)x \geq 0$, ce qui équivaut à $Ax - \rho(A)x = 0$ (théorème 1.1, point (v) en transposant). Le vecteur x est donc un vecteur propre positif non nul de A associé à $\rho(A)$, il est donc strictement positif (théorème de Perron-Frobénius). ■

Lemme 1.9 *Si A est une matrice positive irréductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|B| \leq A$, alors $\rho(B) \leq \rho(A)$. Si $\rho(B) = \rho(A)$ alors $|B| = A$.*
En particulier pour B positive, on a $B \leq A$ et $B \neq A$ entraîne $\rho(B) < \rho(A)$.

Démonstration. On sait déjà que $\rho(B) \leq \rho(A)$ (théorème 1.2).

Supposons que $\rho(B) = \rho(A)$. Il existe alors une valeur propre de B de plus grand module de la forme $\lambda = e^{i\theta}\rho(A)$ et si x est un vecteur propre non nul associé dans $\mathbb{C}^n$, on a alors :

$$\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Bx| \leq |B||x| \leq A|x|,$$

soit $\rho(A)|x| \leq A|x|$ avec A positive irréductible et $|x|$ positif non nul. Le lemme précédent nous dit alors que $A|x| = \rho(A)|x|$ et que $|x|$ est strictement positif. On a donc $|Bx| = |B||x| = A|x|$, soit $(A - |B|)|x| = 0$ avec $A - |B| \geq 0$ et $|x| > 0$, ce qui entraîne $A = |B|$. ■

Théorème 1.13 *Soient A une matrice positive et irréductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|B| \leq A$. On a $\rho(B) \leq \rho(A)$. Si $\rho(B) = \rho(A)$ et si $\lambda = e^{i\theta}\rho(A)$ est une valeur propre de module maximum de B, alors il existe des réels $\theta_1, \cdots, \theta_n$ tels que $B = e^{i\theta}\Delta B\Delta^{-1}$, où Δ est la matrice diagonale de termes diagonaux $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$.*

Démonstration. Avec $\rho(B) = \rho(A)$, en reprenant la démonstration qui précéde, si x est non nul tel que $Bx = \lambda x$, on a alors $A|x| = \rho(A)|x|$ avec $|x| > 0$ et $A = |B|$. Pour tout entier k compris entre 1 et n, on peut écrire $x_k = |x_k| e^{i\theta_k}$, avec $|x_k| > 0$ et $\theta_k \in]-\pi, \pi]$ et en désignant par Δ la matrice diagonale de termes diagonaux $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$, on a $x = \Delta|x|$. L'égalité $Bx = \lambda x$ s'écrit alors :

$$B\Delta|x| = e^{i\theta}\rho(A)\Delta|x|,$$

ce qui donne :

$$A|x| = \rho(A)|x| = e^{-i\theta}\Delta^{-1}B\Delta|x|.$$

En notant $C = e^{-i\theta}\Delta^{-1}B\Delta$, on a $|C| = |B| = A$ et l'égalité précédente s'écrit $|C||x| = C|x|$ avec $|x| > 0$, ce qui équivaut à $C = |C|$ ((théorème 1.1, point (x)), soit à $e^{-i\theta}\Delta^{-1}B\Delta = A$ ou encore $B = e^{i\theta}\Delta B\Delta^{-1}$. ■

1.6 Matrices primitives

Nous avons vu que le théorème 1.6 n'est pas valable si on suppose seulement la matrice A positive. L'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nous montre que l'hypothèse A positive et irréductible n'est pas suffisante non plus.

C'est la notion de matrice primitive qui va nous permettre de prolonger ce théorème.

Définition 1.4 *Une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite primitive si elle est positive irréductible et a unique une valeur propre de module maximale.*

Du théorème de Perron-Frobénius 1.11, on déduit que si la matrice A est primitive, alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal et que cette valeur propre est simple.

Les matrices strictement positives sont des cas particuliers de matrices primitives.

Il est facile de vérifier qu'une matrice est primitive si et seulement si sa transposée l'est.

Théorème 1.14 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice primitive alors son rayon spectral est strictement positif et :*

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k = x\,{}^t y,$$

où x, y sont des vecteurs strictement positifs tels que :

$$Ax = \rho(A)x, \ {}^t A y = \rho(A)y, \ {}^t x y = 1.$$

Démonstration. La matrice A étant positive irréductible, le théorème de Perron-Frobénius 1.11 nous dit que $\rho(A)$ est strictement positif, que c'est une valeur propre simple et que l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur x strictement positif. La matrice ${}^tA$ ayant les mêmes propriétés, il existe un vecteur $z > 0$ tel que ${}^tAz = \rho(A)z$ et le vecteur $y = \frac{1}{{}^tzx}z$ est tel que ${}^tAy = \rho(A)y$ et ${}^txy = 1$. On peut donc définir la matrice $L = x\,{}^ty$ et cette matrice vérifie toutes les conditions du lemme 1.4.

On a alors $\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k - L = \left(\frac{1}{\rho(A)}A - L\right)^k$ pour tout entier $k \geq 1$ et il s'agit de montrer que $\rho(A - \rho(A)L) < \rho(A)$.

Si λ est un valeur propre non nulle de $B = A - \rho(A)L$ et z est un vecteur propre non nul associé, alors $(A - \rho(A)L)z = \lambda z$ et avec $L(A - \rho(A)L) = 0$, $\lambda \neq 0$, on déduit que $Lz = 0$, ce qui entraîne $\lambda z = Az - \rho(A)Lz = Az$, c'est-à-dire que λ est valeur propre de A avec z pour vecteur propre associé et donc $|\lambda| \leq \rho(A)$.

Si $|\lambda| = \rho(A)$, alors $\lambda = \rho(A)$ (A est primitive) et tout vecteur propre associé z est aussi vecteur propre de A, on a donc $z = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, ce qui entraîne :

$$\rho(A)z = (A - \rho(A)L)z = (A - \rho(A)L)\alpha x = 0$$

en contradiction avec $\rho(A) > 0$ et $z \neq 0$. On a donc $|\lambda| < \rho(A)$ pour toute valeur propre de B, ce qui donne le résultat. ∎

Le résultat qui suit nous donne une définition équivalente de la notion de matrice primitive.

Théorème 1.15 *Soit A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette matrice est primitive si et seulement si il existe un entier naturel p tel que A^p soit strictement positive.*

Démonstration. Si A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice primitive alors l'égalité $\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k = L > 0$ entraîne $A^p > 0$ pour p assez grand.

Réciproquement supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit positive avec $A^p > 0$. La matrice A^p est alors irréductible et il en est de même de A (lemme 1.5).

Du théorème de trigonalisation des matrices complexes, on déduit que $\rho(A^p) = \rho(A)^p$. Si λ est une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors λ^p est valeur propre de A^p avec $|\lambda^p| = \rho(A)^p$, ce qui entraîne $\lambda^p = \rho(A)^p$ si A^p est strictement positive. Si $\lambda \neq \rho(A)$, il existe alors deux vecteurs x et y linéairement indépendants tels que $Ax = \rho(A)x$ et $Ay = \lambda y$, ce qui entraîne $A^px = \rho(A)^p x$ et $A^py = \lambda^py = \rho(A)^p z$, c'est-à-dire que x et y sont dans l'espace propre de A^p associé à la valeur propre $\rho(A)^p$, mais on sait que cet espace propre est une droite vectorielle, les vecteurs y et z sont donc liés. On aboutit ainsi à une contradiction. La seule possibilité est donc $\lambda = \rho(A)$, ce qui achève de prouver que A est primitive. ∎

Le résultat qui suit nous donne un critère plus pratique pour vérifier qu'une matrice positive irréductible est primitive.

Théorème 1.16 *Soit A une matrice positive irréductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si tous les termes diagonaux de A sont strictement positifs, alors A^{n-1} est strictement positive et A est primitive.*

Démonstration. On désigne par B la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$ et $b_{ii} = 0$, soit $B = A - \Delta$ où Δ est la matrice diagonale de termes diagonaux a_{ii}. La matrice B est irréductible comme A. En effet si B est réductible, il existe alors une partition (I, J) non triviale de $\{1, \cdots, n\}$ telle $b_{ij} = 0$ pour $(i, j) \in I \times J$, ce qui entraîne $a_{ij} = 0$ pour $(i, j) \in I \times J$

puisque $i \neq j$ dans ce cas, et donc A est réductible). En notant α le plus petit des a_{ii} pour i compris entre 1 et n, on a $\alpha > 0$ et :

$$A \geq \alpha I_n + B = \alpha \left(I_n + \frac{1}{\alpha} B \right)$$

et donc $A^{n-1} > \alpha^{n-1} \left(I_n + \frac{1}{\alpha} B \right)^{n-1} > 0$ du fait que $\frac{1}{\alpha} B$ est irréductible. ■

On peut montrer le résultat suivant (voir [1], corollaire 8.5.9).

Théorème 1.17 (Wielandt) *Soit A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette matrice est primitive si et seulement si A^{n^2-2n+2} est strictement positive.*

1.7 Matrices stochastiques

Définition 1.5 *On dit qu'une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si elle est positive et :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Exemple 1.5 *Une matrice de permutation est stochastique.*

Si on note e le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1, alors une matrice positive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si $Ae = e$, ce qui revient à dire que 1 est valeur propre de A et que e est un vecteur propre associé.

De cette remarque, on peut déduire que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

D'autre part si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices stochastiques qui converge vers une matrice A, alors cette limite est également stochastique. L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ des matrices stochastiques est donc fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et étant borné (on a $\|A\|_\infty = 1$ pour toute matrice stochastique), on en déduit que c'est un compact.

Enfin il est facile de vérifier que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est convexe.

Du théorème 1.3, on déduit que le rayon spectral d'une matrice stochastique vaut 1 et que c'est une valeur propre. De plus e étant un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre $1 = \rho(A)$, on déduit du corollaire 1.8 que si x est un vecteur propre strictement positif d'une matrice stochastique alors la valeur propre associée est 1. Ce même corollaire nous dit que :

$$\sup_{x>0} \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \inf_{x>0} \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = 1.$$

On résume ces propriétés avec le théorème suivant.

Théorème 1.18 *L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ des matrices stochastiques d'ordre n est convexe, compact et stable par la multiplication des matrices.*
Toute matrice stochastique a un rayon spectral égal 1 et ce rayon spectral est la seule valeur propre admettant des vecteurs propres strictement positifs.

Si A est une matrice stochastique primitive (par exemple strictement positive), alors $1 = \rho(A)$ est l'unique valeur propre dominante de A et cette valeur propre est simple. En désignant par f un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1 qui vérifie ${}^tfe = 1$, soit $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$, on a d'après le théorème 1.14 :

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = e\,{}^tf = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.6 *On appelle matrice doublement stochastique une matrice stochastique A telle que ${}^tA$ soit aussi stochastique.*

Si A est une matrice doublement stochastique alors e est vecteur propre de A et ${}^tA$ associé à la valeur propre 1 et si de plus A est primitive, alors le résultat précédent donne $f = \frac{1}{n}e$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.8 *Si la matrice A est stochastique irréductible, alors la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\geq 1}$ n'a pas nécessairement de limite comme le montre l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
Par contre si on suppose de plus que tous les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs, alors cette matrice est primitive (théorème 1.16) et le résultat précédent s'applique.

Les matrices de permutation sont des matrices doublement stochastiques et elles suffisent à décrire l'ensemble de toutes ces matrices. Précisément, on le résultat suivant (voir [1], théorème 8.7.1).

Théorème 1.19 (Birkhoff) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est doublement stochastique si et seulement si elle s'écrit $A = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_k$, où les P_k sont des matrices de permutation et les λ_k des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$.*

Comme $\mathfrak{S}_n$ est de cardinal $n!$, on déduit que p est au plus égal à $n!$. En fait on peut montrer que $p \leq n^2 - 2n + 2$.

1.8 Exercices

Exercice 1.1 *Pour $n \geq 2$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, \cdots, n\}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par A une matrice positive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Pour i, j dans $\mathbb{N}_n$, m entier naturel non nul, on note $\mathcal{L}(i,j,m)$ la proposition :

$$\exists\,(i_0, \cdots, i_m) \in (\mathbb{N}_n)^{m+1} \quad : \quad \begin{cases} i_0 = i, \quad i_m = j \\ \forall k \in \{0, \cdots, m-1\}, \quad a_{i_k, i_{k+1}} \neq 0 \end{cases}$$

et $\mathcal{L}(i,j)$ la proposition :

$$\exists m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{L}(i,j,m) \text{ est vraie.}$$

1. *Montrer que la propriété* $\mathcal{L}$ *est transitive dans le sens où* $\mathcal{L}(i,j)$ *et* $\mathcal{L}(j,r)$ *vraies pour* i,j,r *dans* $\mathbb{N}_n$ *entraîne* $\mathcal{L}(i,r)$ *vraie.*
2. *Montrer que si* A *est réductible et si* (I,J) *est une partition non triviale de* $\mathbb{N}_n$ *telle que :*
$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad a_{i,j} = 0$$
alors, pour tout couple $(i,j) \in I \times J$, $\mathcal{L}(i,j)$ *n'est pas vraie.*
3. *Soit* j *fixé dans* $\mathbb{N}_n$. *On note* J *la partie de* $\mathbb{N}_n$ *constituée de* j *et des indices* $i \in \mathbb{N}_n$ *tels que* $\mathcal{L}(i,j)$ *est vraie. Montrer que le sous-espace* $V_J = \mathrm{Vect}\{e_i \mid i \in J\}$ *est stable par* A.
4. *Déduire de ce qui précède l'équivalence :*
$$A \text{ irréductible} \Leftrightarrow \text{ Pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n, \quad \mathcal{L}(i,j) \text{ est vraie.}$$
5. *On suppose que* $\mathcal{L}(i,j)$ *est vraie, avec* $i \neq j$. *Montrer qu'il existe* $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ *tel que* $\mathcal{L}(i,j,m)$ *soit vraie.*
6. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $A^m = \left(\left(a_{i,j}^{(m)}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. *Montrer que pour* $i \neq j$ *on a l'équivalence :*
$$\mathcal{L}(i,j,m) \text{ est vraie} \Leftrightarrow \quad a_{i,j}^{(m)} > 0.$$
7. *En conclure que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *la matrice* A *est irréductible ;*
   (b) *pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ *tel que* $i \neq j$, *il existe* $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ *tel que* $a_{i,j}^{(m)} > 0$ *;*
   (c) $(I + A)^{n-1} > 0$.

Solution 1.1

1. *Si* $\mathcal{L}(i,j)$ *et* $\mathcal{L}(j,r)$ *sont vraies, il existe alors des entiers naturels non nuls* m *et* p, *des suites d'éléments dans* $\mathbb{N}_n$, $(i_0 = i, i_1, \cdots, i_m = j)$ *et* $(j_0 = j, j_1, \cdots, j_p = r)$ *tels que* $a_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$ *pour* $k = 0, \cdots, m-1$ *et* $a_{j_k, j_{k+1}} \neq 0$ *pour* $k = 0, \cdots, p-1$. *En posant* $q = m + p$ *et :*
$$(s_0, s_1, \cdots, s_q) = (i_0 = i, i_1, \cdots, i_m = j_0 = j, j_1, \cdots, j_p = r),$$
on a $a_{s_k, s_{k+1}} \neq 0$ *pour* $k = 0, \cdots, q-1$, *c'est-à-dire que* $\mathcal{L}(i,r)$ *est vraie.*
2. *Supposons la matrice* A *réductible et soit* (I,J) *une partition non triviale de* $\mathbb{N}_n$ *telle que* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $(i,j) \in I \times J$. *Pour* $(i,j) \in I \times J$, $m \geq 1$ *et* $(i_0, \cdots, i_m) \in \mathbb{N}_n^{m+1}$ *avec* $i_0 = i$, $i_m = j$, *en désignant par* k *le plus grand indice compris entre* 0 *et* $m-1$ *tel que* $i_k \in I$, *on a* $(i_k, i_{k+1}) \in I \times J$ *et* $a_{i_k, i_{k+1}} = 0$, *la proposition* $\mathcal{L}(i,j,m)$ *est donc fausse pour tout* $m \geq 1$ *et également la proposition* $\mathcal{L}(i,j)$.
3. *Supposons* V_J *non stable par* A, *il existe alors un indice* $i \in J$ *tel que* $Ae_i \notin V_J$, *soit* $Ae_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$ *avec* $a_{ki} \neq 0$ *pour un indice* $k \notin J$. *On a donc* $k \neq j$. *La propriété* $\mathcal{L}(k,i,1)$ *est donc vraie* ($(i_0, i_1) = (k,i) \in \mathbb{N}_n^2$ *et* $a_{i_0,i_1} = a_{ki} \neq 0$) *ainsi que* $\mathcal{L}(k,i)$. *Si* $i = j$, *alors* $\mathcal{L}(k,j)$ *est vraie avec* $k \neq j$, *ce qui signifie que* $k \in J$ *en contradiction avec* $k \notin J$. *On a donc* $i \neq j$ *et* $i \in J$, *ce qui signifie que* $\mathcal{L}(i,j)$ *est vraie. Mais* $\mathcal{L}(k,i)$ *et* $\mathcal{L}(i,j)$ *vraies entraîne* $\mathcal{L}(k,j)$ *vraie par transitivité et comme* $k \neq j$, *cela veut dire que* $k \in J$ *toujours en contradiction avec* $k \notin J$. *En conclusion* V *est stable par* A.

4. *On a vu en 2 que si A est réductible il existe alors un couple (i,j) dans $\mathbb{N}_n^2$ tel que $\mathcal{L}(i,j)$ n'est pas vraie. On déduit donc que si $\mathcal{L}(i,j)$ est vraie pour tout (i,j) dans $\mathbb{N}_n^2$ alors A est irréductible.*
   Réciproquement supposons A irréductible. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, l'ensemble J de la question précédente n'est pas vide ($j \in J$) et l'espace V_J associé est stable par A, ce qui entraîne $J = \mathbb{N}_n$ (théorème 1.9), encore équivalent à dire que $\mathcal{L}(i,j)$ est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$. Si $n \geq 2$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$ il existe $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$ et $\mathcal{L}(i,j)$, $\mathcal{L}(j,i)$ vraies entraîne par transitivité que $\mathcal{L}(j,j)$ est vraie. On a donc bien $\mathcal{L}(i,j)$ est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}_n$.

5. *Si on suppose $\mathcal{L}(i,j)$ vraie avec $i \neq j$, il existe alors un entier $m \geq 1$ et un m-uplet d'entiers $(i_0, \cdots, i_m)$ avec $i_0 = i$, $i_m = j$ tels que $a_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$ pour $k = 0, \cdots, m-1$. On désigne par m le plus petit entier naturel non nul vérifiant cette propriété. Pour cet indice m les entiers i_k sont nécessairement deux à deux distincts. En effet si $i_p = i_q$ avec $0 \leq p < q \leq m$ alors la suite $(i_k)_{0 \leq k \leq m}$ privée de i_q convient aussi, ce qui contredit la caractère minimal de m. On a donc $\operatorname{card}\{i_0, \cdots, i_m\} = m+1$ avec $\{i_0, \cdots, i_m\} \subset \mathbb{N}_n$, donc $m+1 \leq n$, soit $m \leq n-1$.*

6. *Pour $m \geq 2$ et i,j dans $\mathbb{N}_n$, on a $a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m-1)} a_{kj}$.*
   On montre par récurrence sur $m \geq 1$ que pour $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$, on a $\mathcal{L}(i,j,m)$ vraie si et seulement si $a_{ij}^{(m)}$ est strictement positif. Pour $m = 1$ c'est la définition de $\mathcal{L}(i,j,1)$. En supposant le résultat acquis au rang $m-1$, on a $a_{ij}^{(m)} > 0$ si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_{ik}^{(m-1)} > 0$ et $a_{kj} > 0$ et avec l'hypothèse de récurrence cela équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $\mathcal{L}(i,k,m-1)$ et $\mathcal{L}(k,j,1)$ soient vraies, ce qui équivaut à l'existence d'entiers $i_0 = i, i_2, \cdots, i_{m-1} = k$ dans $\mathbb{N}_n$ tels que $a_{i_p, i_{p+1}} \neq 0$ pour tout p compris entre 0 et $m-2$ et $a_{kj} \neq 0$, encore équivalent à $\mathcal{L}(i,j,m)$ vraie.

7. *Si la matrice positive A est irréductible, alors pour $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$ la propriété $\mathcal{L}(i,j)$ est vraie ce qui entraîne l'existence de $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\mathcal{L}(i,j,m)$ soit vraie, encore équivalent à $a_{ij}^{(m)} > 0$.*
   Supposons que pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$ il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ (dépendant de i et j) tel que $a_{ij}^{(m)} > 0$. Avec :
   $$(I+A)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k A^k,$$
   on déduit que le coefficient d'indice (i,i) de cette matrice est :
   $$c_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a_{ii}^{(k)} \geq 1 > 0$$
   et pour $i \neq j$, du fait qu'il existe un indice m compris entre 1 et $m-1$ tel que $a_{ij}^{(m)} > 0$, on a pour le coefficient d'indice (i,j) de $(I+A)^{n-1}$:
   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a_{ij}^{(k)} \geq C_{n-1}^m a_{ij}^{(m)} > 0.$$
   En définitive la matrice $(I+A)^{n-1}$ est strictement positive.
   Si la matrice $(I+A)^{n-1}$ est strictement positive, alors $\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a_{ij}^{(k)} > 0$ pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$ et il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\mathcal{L}(i,j,m)$ soit vraie, ce qui entraîne que $\mathcal{L}(i,j)$ est

vraie. On a donc $\mathcal{L}(i,j)$ vraie pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}_n$, ce qui équivaut à $\mathcal{L}(i,j)$ vraie pour tous i,j dans $\mathbb{N}_n$ puisque $n \geq 2$, équivalent à dire que A est irréductible.

Exercice 1.2 *Montrer que, pour $n \geq 3$, la matrice de Weilandt :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est primitive.

Solution 1.2 *On utilise les notations et résultats de l'exercice précédent.*

Le coefficient $a_{i,i+1}$ pour i compris entre 1 et $n-1$ et le coefficient $a_{n,1}$ étant non nul, on déduit que $\mathcal{L}(i,j)$ est vraie pour tous i,j (par transitivité) et donc que A est irréductible.

Le polynôme caractéristique de la matrice positive A est $P(X) = X^n - X - 1$. Avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^n = A + I$ et $A^{n^2-n} = (A_0 + I)^{n-1}$ est strictement positive puisque A est irréductible, la matrice A est donc primitive.

On peut en fait vérifier que le coefficient d'indice $(1,1)$ de A^{n^2-2n+1} est nul et que $A^{n^2-2n+2} > 0$.

Exercice 1.3 *On dit qu'une matrice rectangulaire $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est non redondante si aucune de ses lignes ni aucune de ses colonnes n'est nulle.*
Une matrice non redondante $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est dite décomposable s'il existe des matrices de permutation $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ telles que PBQ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$$

où B' et B'' sont des matrices rectangulaires.
Une matrice rectangulaire B est dite indécomposable si elle est non redondante et n'est pas décomposable.

1. *Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et posons :*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C}), \quad \text{avec } l = m + n.$$

   Montrer que B est indécomposable si et seulement si C est irréductible.

2. *Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels positifs ou nuls. Montrer que si B est indécomposable, alors $B\,{}^tB$ et ${}^tBB$ sont primitives.*

Solution 1.3

1. *Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ non redondante et décomposable. Il existe alors une partition (I,J) de $\{1,\cdots,m\}$ (les numéros de lignes) et une partition (K,L) de $\{1,\cdots,n\}$ (les numéros de colonnes) telles que :*

$$\forall (i,j) \in I \times K \cup J \times L, \quad b_{ij} = 0.$$

On définit alors la partition (U, V) *de* $\{1, \cdots, m+n\}$ *par :*

$$\begin{cases} U = I \cup (m+L), \\ V = J \cup (m+K), \end{cases}$$

où on a posé $m + L = \{m + j \mid j \in L\}$ *et pour* $(i,j) \in U \times V$*, on a les quatre possibilités suivantes :*
soit $i \geq m+1$ *et* $j \geq m+1$*, dans ce cas on a* $c_{ij} = 0$ *par définition de la matrice* $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *et* ${}^tB \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ *;*
soit $i \geq m+1$ *et* $j \leq m$*, dans ce cas en écrivant* $i = m+i'$*,* c_{ij} *est le coefficient de la ligne* i' *et de la colonne* j *de* ${}^tB$*, soit* $c_{ij} = b_{ji'}$ *avec* $(j, i') \in J \times L$*, ce qui donne* $c_{ij} = b_{ji'} = 0$ *;*
soit $i \leq m$ *et* $j \leq m$*, dans ce cas on a* $c_{ij} = 0$ *par définition de la matrice* C *;*
soit $i \leq m$ *et* $j \geq m+1$*, dans ce cas en écrivant* $j = m+j'$*,* c_{ij} *est le coefficient de la ligne* i *et de la colonne* j' *de* B*, soit* $c_{ij} = b_{ij'}$ *avec* $(i, j') \in I \times K$*, ce qui donne* $c_{ij} = b_{ij'} = 0$*.*
On a donc $c_{ij} = 0$ *pour tout* $(i,j) \in U \times V$ *et avec la symétrie de la matrice* C *on a également* $c_{ij} = 0$ *pour tout* $(i,j) \in V \times U$*. Cette partition* (U, V) *de* $\{1, \cdots, m+n\}$ *définit donc une matrice de permutation* P *telle que* $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$*, ce qui signifie que la matrice* C *est réductible.*
Réciproquement supposons la matrice C *réductible, il existe alors une partition* (U, V) *de* $\{1, \cdots, m+n\}$ *telle que* $c_{ij} = 0$ *pour tout* $(i,j) \in U \times V \cup V \times U$*. On définit alors les partitions* (I, J) *de* $\{1, \cdots, m\}$ *et* (K, L) *de* $\{1, \cdots, n\}$ *par :*

$$\begin{cases} I = \{1, \cdots, m\} \cap U, \quad J = \{1, \cdots, m\} \cap V, \\ K = \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid m+j \in V\}, \quad L = \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid m+j \in U\}. \end{cases}$$

Pour $(i,j) \in I \times K$*, on a* $(i, m+j) \in U \times V$ *et* $c_{ij} = 0$ *(coefficient de la ligne* $i \leq m$ *et de la colonne* $m+j$ *de* C*), c'est-à-dire* $b_{ij} = 0$*. De même si* $(i,j) \in J \times L$*, on a* $(i, m+j) \in V \times U$ *et* $c_{ij} = 0$*, soit* $b_{ij} = 0$*. En conclusion* B *est décomposable.*
On a donc ainsi montré que B *est indécomposable si et seulement si* C *est irréductible.*

2. *Si* $D = B\,{}^tB$ *est réductible, étant symétrique cela équivaut à l'existence d'une partition* (I, J) *de* $\{1, \cdots, m\}$ *telle que* $d_{ij} = 0$ *pour tout* $(i,j) \in I \times J$*, soit :*

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{jk} = 0.$$

La matrice B *étant positive, cela équivaut à :*

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad b_{ik} b_{jk} = 0.$$

On définit alors une partition (K, L) *de* $\{1, \cdots, n\}$ *en posant :*

$$\begin{cases} K = \{k \in \{1, \cdots, n\} \mid \exists j \in J \mid b_{jk} \neq 0\}, \\ L = \{k \in \{1, \cdots, n\} \mid \exists i \in I \mid b_{ik} \neq 0\}. \end{cases}$$

En effet, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ *il existe* $i \in \{1, \cdots, m\} = I \cup J$ *tel que* $b_{ik} \neq 0$ *puisque* B *est supposée non redondante, on a donc* $k \in K \cup L$*. Si* $k \in K$ *il existe alors* $j \in J$ *tel que* $b_{jk} \neq 0$ *et* $b_{ik} b_{jk} = 0$ *pour tout* $i \in I$ *entraîne* $k \notin L$*. On a donc* $K \cap L = \emptyset$*, c'est-à-dire que* (K, L) *est bien une partition de* $\{1, \cdots, n\}$*. Pour* $(i,k) \in I \times K$*, il existe* $j \in J$ *tel que* $b_{jk} \neq 0$ *et* $b_{ik} b_{jk} = 0$ *donne* $b_{ik} = 0$*. De même* $(i,k) \in J \times L$ *donne* $b_{ik} = 0$*.*

La matrice B est donc décomposable.
On a donc ainsi montré que si B est indécomposable alors $B\,{}^tB$ est irréductible. De manière analogue on montre que ${}^tBB$ est irréductible.
La matrice $B\,{}^tB$ étant symétrique réelle positive (au sens euclidien) est diagonalisable à valeurs propres réelles positives. Cette matrice étant positive et irréductible, son rayon spectral r est valeur propre avec un espace propre de dimension 1, cette valeur propre est donc simple (puisque $B\,{}^tB$ est diagonalisable) et $|\lambda| < r$ pour toute autre valeur propre de $B\,{}^tB$. Il en de même de ${}^tBB$ puisque cette matrice a même polynôme caractéristique que $B\,{}^tB$.

Exercice 1.4 *Soit une matrice stochastique d'ordre n. Montrer que toute valeur propre de A de module maximal est une racine m-ème de l'unité avec $1 \leq m \leq n$.*

Solution 1.4 *Voir J. M. Ferrard, sur ce site, le problème sur les matrices stochastiques en Maths Spé.*

Bibliographie

[1] R. A. Horn, C. A. Johnson — *Matrix analysis.* Cambridge University Press (1985).
[2] J. E. Rombaldi — *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).