Agrégation Externe

Exponentielle de matrice, groupes à un paramètre

Notations et rappels

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

Si n est un entier ≥ 1, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles de taille n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices complexes de taille n, $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n inversibles, $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes de taille n inversibles, $SL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n de déterminant 1.

Si A est une matrice réelle ou complexe, on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déterminant et ${}^tA$ sa matrice transposée.

Si A est une matrice complexe, on note A^* sa matrice adjointe.

On désigne par I la matrice identité et aussi, par abus de notation, l'application linéaire identité.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne standard :

$$\text{Si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ alors } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

et $\mathbb{C}^n$ de la structure hermitienne standard :

$$\text{Si } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \text{ alors } \|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2}$$

Les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont alors munis des normes matricielles associées :

pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|M\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|M(x)\|$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et dans le membre de droite, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne ou hermitienne selon le cas.

On considérera dans certaines questions $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure d'espace affine. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, on désigne sa partie linéaire par A_φ, et par M_φ la matrice de A_φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $GA_n(\mathbb{R})$ le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$, et $SA_n(\mathbb{R})$ son sous-groupe des applications affines dont la partie linéaire est de déterminant 1.

La première partie rassemble divers résultats préliminaires utilisés dans les autres parties. Les différentes questions de cette partie, à part les questions **I.1.** et **I.2.** sont indépendantes. La partie **V** est indépendante des parties **II**, **III** et **IV**.

Partie I

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F'(t) = AF(t) \ \text{ et } F(0) = I$$

   Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F(t) = \exp(tA)$$

   (on pourra dériver la fonction $t \mapsto \exp(-tA)F(t)$).

2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Démontrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ (on pourra utiliser la question **I.1.**).

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que sa norme, lorsqu'on la voit comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est égale à sa norme comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (On pourra observer, en le justifiant, que si $z \in \mathbb{C}^n$ est écrit sous la forme $z = x + iy$ avec x, y dans $\mathbb{R}^n$, alors $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$).
5. Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \tau: & GA_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{n+1}(\mathbb{R}) \\ & \varphi & \mapsto & \begin{pmatrix} M_\varphi & \varphi(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

définit un morphisme injectif de groupes.
6. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application affine. Démontrer que φ possède un unique point fixe si, et seulement si, l'application linéaire $A_\varphi - I$ est bijective.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle avec $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   (a) Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que x et Ax sont linéairement indépendants.
   (b) Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls (on pourra procéder par récurrence sur n).
   (c) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice P comme dans **I.7.b.** ci dessus avec $P \in SL_n(\mathbb{R})$.
   (d) On considère le cas $n = 2$. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Démontrer qu'il existe $Q \in SL_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit égale à une matrice de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Partie II

On considère la boule ouverte :

$$B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M - I\| < 1\}$$

1. Soit $g \in B$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de g. Démontrer que $|\lambda - 1| < 1$. En déduire que B est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ contenu dans la boule ouverte B et $g \in G$.
   (a) Démontrer que g possède une unique valeur propre complexe égale à 1 (on pourra considérer les puissances g^k, pour $k \in \mathbb{Z}$, de g).
   (b) Démontrer qu'il existe une matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $g = I + N$.
   (c) Démontrer que $g = I$.

Partie III

On appelle sous groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ une application continue $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ une telle application.

1. Que vaut $\varphi(0)$?
2. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \varphi'(0)\,\varphi(t)$$

   En déduire la forme des sous groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On revient au cas général et on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du$$

   (a) Démontrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \psi(s+t) = \psi(s) + \varphi(s)\,\psi(t)$$

   (b) Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $t \in]0, r[$, $\psi(t)$ est inversible.

   (c) Conclure.
4. On suppose dans cette question que φ est à valeurs dans $SL_2(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Montrer que l'orbite $\{\varphi(t)\,x \mid t \in \mathbb{R}\}$ est soit un point, soit une demi-droite, soit une droite, soit une ellipse, soit un arc d'hyperbole.

Partie IV

On rappelle que $SA_2(\mathbb{R})$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, dont la partie linéaire est de déterminant 1. L'application τ de la question **I.5.** identifie $SA_2(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to SA_2(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. On dit que φ est continu, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$, si l'application $\tau \circ \varphi$ l'est.

Cette partie étudie les morphismes de groupes continus $\varphi : \mathbb{R} \to SA_2(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to SA_2(\mathbb{R})$ un tel morphisme.

1. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2.

   (a) Démontrer que, s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t)$ possède un unique point fixe M, alors M est point fixe de tous les $\varphi(s)$, pour $s \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer dans ce cas la nature des orbites $\{\varphi(s)\,x \mid s \in \mathbb{R}\}$ des éléments de $\mathbb{R}^2$.
3. On suppose que, pour tout réel t, $\varphi(t)$ est une translation. Expliciter la forme de $\varphi(t)$ et déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)\,x \mid t \in \mathbb{R}\}$ des éléments de $\mathbb{R}^2$.
4. On suppose que l'on n'est dans aucune des situations des questions **IV.2.** ou **IV.3.** ci-dessus. On appelle $A(t)$ la partie linéaire de $\varphi(t)$.

   (a) Démontrer qu'il existe $P \in SL_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout réel t, $P^{-1}AP$ soit égale à $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, dans un repère convenable, pour tout réel t, $\varphi(t)$ s'écrit :

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(t) \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon t x_2 + u(t) \\ x_2 + v(t) \end{pmatrix}$$

   où $\varepsilon = \pm 1$.

(b) Démontrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ v(t+s) = v(t) + v(s)$$

En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = \gamma t$$

(c) Démontrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ u(t+s) = u(t) + u(s) + \varepsilon st\gamma$$

En déduire la forme de $u(t)$.

(d) Déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)\, x \mid t \in \mathbb{R}\}$ des éléments de $\mathbb{R}^2$.

Partie V

1. Dans chacun des cas suivants, démontrer que G est connexe par arcs (pour le cas (c), on pourra diagonaliser l'élément considéré et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbb{R})$.

   (a) $G = SL_n(\mathbb{R})$.

   (b) $G = SO_n(\mathbb{R})$.

   (c) $G = SU_n(\mathbb{C})$.

2. Si G est l'un des groupes de la question précédente, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \in G\}$$

   avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans les cas (a) et (b) et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans le cas (c).
   Démontrer que :

   (a) si $G = SL_n(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}$;

   (b) si $G = SO_n(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$;

   (c) si $G = SU_n(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X \text{ et } \mathrm{Tr}(X) = 0\}$.
   On observe que, dans chacun des cas, $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. L'application exponentielle envoie $\mathcal{G}$ dans G.
   Démontrer dans chacun des cas (b) et (c) ci-dessus, que cette application est surjective (pour $G = SU_n(\mathbb{C})$, on pourra diagonaliser l'élément considéré et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbb{R})$.
   Dans les questions **V.4.** et **V.5.** on suppose que G est l'un des groupes de la question **V.1.**

4.

   (a) Soient $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$. Démontrer que $gXg^{-1} \in \mathcal{G}$ et que l'application :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ (g, X) & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

   définit une action de G sur $\mathcal{G}$ par automorphismes linéaires.

   (b) Soient X, Y dans $\mathcal{G}$. Démontrer que $XY - YX \in \mathcal{G}$ (on pourra considérer $\exp(tX)\, Y \exp(-tX)$.

   Dans ce qui suit, on note $[X,Y] = XY - YX$ et on note $f_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ l'application linéaire donnée par $f_X(Y) = [X,Y]$.

5. Démontrer que :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{G}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tf_X)(Y) = \exp(tX)\, Y \exp(-tX)$$

6. On considère dans cette question $G = SU_2(\mathbb{C})$.

   (a) Démontrer que $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 dont les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ forment une base.

   (b) Exprimer les éléments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ en fonction de A, B et C.

   (c) Soit $X = xA + yB + zC$ avec x, y, z dans $\mathbb{R}$, un élément de $\mathcal{G}$. Déterminer la matrice de l'application linéaire f_X dans la base (A, B, C).

   (d) Démontrer que l'application $X \mapsto \det(X)$ détermine une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{G}$.

   (e) Démontrer que l'action de G sur $\mathcal{G}$ introduite en **V.4.a.** détermine un morphisme de groupes surjectif de $SU_2(\mathbb{C})$ sur $SO_3(\mathbb{R})$.

   (f) Ce morphisme est-il injectif ?

   (g) Les groupes $SU_2(\mathbb{C})$ et $SO_3(\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes ?