**Agrégation Externe**

**Devoir à la maison (ou ailleurs)**

**Le 19 septembre 2016**

**A remettre pour le 27 septembre 2016**

**Exercices**

## – I – Analyse réelle

1. Soient $T_1, T_2$ deux réels non nuls et $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$

Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction $f$ est alors constante.

2. Soient $T_1, T_2$ deux réels non nuls et $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point $a$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$

Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction $f$ est alors constante.

3. Montrer que pour tout entier naturel $n$ et toutes suites de réels $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ , les $a_k$ étant non tous nuls et les $\lambda_k$ deux à deux distincts, la fonction $f_n$ définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

a au plus $n$ racines réelles distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$.

## – II – Suites et séries de fonctions

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\left(n+in^2x\right)}$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, mais non développable en série entière en 0.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} e^{-ixt} dt$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, mais non développable en série entière en 0.

## – III – Longueur de courbes

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

la longueur de la courbe représentative de $f$.

Étant données deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telles que :

- $f(a) = g(a)$ , $f(b) = g(b)$ ;
- $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ ;
- $g$ est convexe.

On se propose de montrer que $L(f) \geq L(g)$, l'égalité étant réalisée si et seulement $f = g$.
On désigne par $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \sqrt{1+t^2}$$

1. Pour cette question, $a < b$ sont deux réels, $I = [a, b]$, $f$ est une fonction à valeurs réelles positives de classe $\mathcal{C}^1$ et $g$ est une fonction à valeurs réelles continue sur $I$.

   (a) Montrer que si $f$ est décroissante sur $I$, il existe alors un réel $c \in I$ tel que :

   $$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(a) \int_a^c g(t)\, dt$$

   (b) Montrer que si $g$ est monotone sur $I$, il existe alors un réel $c \in I$ tel que :

   $$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(a) \int_a^c g(t)\, dt + f(b) \int_c^b g(t)\, dt$$

   (deuxième formule de la moyenne).

2. Montrer que pour tous réels $x$ et $y$, on a :

   $$\varphi(y) \geq \varphi(x) + (y - x)\, \varphi'(x)$$

   l'inégalité étant stricte pour $x \neq y$.

3. En déduire que :

   $$L(f) \geq L(g) + \int_a^b (f'(t) - g'(t))\, \varphi' \circ g'(t)\, dt$$

4. En supposant que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, montrer que :

   $$\int_a^b (f'(t) - g'(t))\, \varphi' \circ g'(t)\, dt \geq 0$$

   et conclure.

5. On suppose que $g$ est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que l'inégalité $L(f) \geq L(g)$ est encore réalisée.

## – IV – Algèbre générale

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est principal.
2. $\mathbb{A}$ désigne un anneau commutatif, unitaire, intègre et $\mathbb{K}$ est le corps des fraction de $\mathbb{A}$.
   On se donne une partie $S$ de $\mathbb{A}^*$ qui contient 1 et qui est stable pour le produit, c'est-à-dire que pour tout $(a, b)$ dans $S^2$, le produit $ab$ est dans $S$.

   (a) Montrer que l'ensemble :

   $$S^{-1}\mathbb{A} = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in \mathbb{A} \text{ et } s \in S \right\}$$

   est un sous-anneau du corps $\mathbb{K}$ qui contient $\mathbb{A}$.

   (b) Montrer que si $\mathbb{A}$ est principal, il en est alors de même de $S^{-1}\mathbb{A}$.

   (c) Montrer que si $\mathbb{A}$ est euclidien, il en est alors de même de $S^{-1}\mathbb{A}$.

   (d) Montrer que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est euclidien (donc principal).

(e) Montrer que l'ensemble :

$$\mathbb{A} = \left\{ \frac{P(X)}{X^n} \mid P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$

est un anneau euclidien.

3. Montrer que l'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)}$ est euclidien.

## – V – Algèbre linéaire (d'après agrégation 2008)

Si $n$ est un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un corps, on note $\mathcal{MT}(n,\mathbb{K})$ l'affirmation suivante :
Pour toutes matrices $A$ et $B$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la propriété :
$(a)$ $A$ et $B$ commutent ;
est équivalente à la propriété :
$(b)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut montrer que $\mathcal{MT}(n,\mathbb{C})$ est vraie pour tout $n \geq 1$ (théorème de Motzkin-Taussky, 1952).
On se propose de montrer ici que l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathcal{MT}(n,\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geq 1$ et tout corps $\mathbb{K}$, puis d'étudier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans les affirmations $\mathcal{MT}(2,\mathbb{R})$ et $\mathcal{MT}(2,\mathbb{C})$.

1. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   On considère $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables de $E$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de $v$ sont stables par $u$, c'est-à-dire que si $F$ est un sous-espace propre de $v$, on a $u(F) \subset F$.
   (b) Montrer que $u$ induit sur chaque sous-espace propre de $v$ un endomorphisme diagonalisable.
   (c) En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans $E$ pour les endomorphismes $u$ et $v$, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de $u$ et de $v$.
2. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $E$. On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
   $$\left(\forall (i,j) \in I^2\right),\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$$
   Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans $E$ pour la famille $(u_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme $u_i$, $i \in I$.
3. Montrer que l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathcal{MT}(n,\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geq 1$ et tout corps $\mathbb{K}$.
4. Étudier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathcal{MT}(2,\mathbb{R})$.
5. On étudie l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathcal{MT}(2,\mathbb{C})$.
   Soit $A$ et $B$ deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ satisfaisant à la propriété $(b)$ de $\mathcal{MT}(2,\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $B$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.
   (b) En supposant que $B$ est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe $\lambda_0$ tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.
   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans $\mathcal{MT}(2,\mathbb{C})$ est vraie.

## Problème

## Corps ordonnés

Ce problème a pour objet l'étude des corps commutatifs ordonnés, c'est-à-dire les corps munis d'une relation d'ordre total qui est compatible avec l'addition et la multiplication par les éléments positifs. Par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou tout corps compris entre les deux (les nombres algébriques ou les nombres constructibles).

Certaines questions peuvent sembler élémentaires. Il ne suffit pas d'affirmer que le résultat est évident, il faut donner une réponse concise mais rigoureuse en mettant bien en évidence les points qui permettent d'aboutir.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

### – I – Corps ordonnables

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

On note $+$ l'addition sur $\mathbb{K}$ et $\cdot$ la multiplication (on écrira aussi $xy$ pour $x \cdot y$).

Pour toutes parties $A, B$ de $\mathbb{K}$, on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} -A = \{-x \mid x \in A\} \\ A^2 = \{x^2 \mid x \in A\} \\ A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\} \\ A \cdot B = \{x \cdot y \mid (x, y) \in A \times B\} \end{array} \right.$$

On dit que $\mathbb{K}$ est ordonnable s'il existe une relation d'ordre total qui est compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une relation noté $\leq$ telle que :
- $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{K}$ ;
- pour tous $x, y, z$ dans $\mathbb{K}$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ x \leq y \text{ et } 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \end{array} \right.$$

Si $\mathbb{K}$ est ordonnable, on dira alors que $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps ordonné.

Si $x \leq y$ dans $\mathbb{K}$, on pourra écrire de manière équivalente $y \geq x$.

On note :

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K} \mid 0 \leq x\}$$

Le corps des réels est muni de sa structure ordonnée usuelle et ses propriétés classiques (propriété d'Archimède, existence des bornes supérieures, ...) sont connues.

1. Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps ordonné. Montrer que pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ on a $0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les $x_i$ sont nuls.
2. Montrer qu'un corps ordonnable est nécessairement de caractéristique nulle.
3. Montrer qu'un corps algébriquement clos n'est pas ordonnable.
4. Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps ordonné. Pour tout polynôme $P$ dans $\mathbb{K}[X]$, on note :

$$d(P) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } P = 0 \\ a_n \text{ si } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ est de degré } n. \end{array} \right.$$

On écrit toute fraction rationnelle $R$ dans $\mathbb{K}(X)$ sous la forme $R = \dfrac{P}{Q}$ avec $P, Q$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q$ non nul unitaire. On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{K}(X)$ par :

$$\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \geq 0.$$

Montrer que cette relation est bien définie et que $(\mathbb{K}(X), \leq)$ un corps ordonné.

5. Montrer qu'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est ordonnable si, et seulement si, il existe une partie $P$ de $\mathbb{K}$ telle que :
$$\begin{cases} P \cap (-P) = \{0\} \\ P \cup (-P) = \mathbb{K} \\ P + P \subset P \\ P \cdot P \subset P \end{cases} \tag{1}$$
6. Montrer que si $(\mathbb{L}, \leq)$ est un corps ordonné, alors tout sous-corps de $\mathbb{L}$ est naturellement ordonnable par $\leq$ .
7. Montrer que si $(\mathbb{L}, \leq)$ est un corps ordonné, alors tout corps isomorphe à $\mathbb{L}$ est naturellement ordonnable.
8. Montrer qu'il existe une unique relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ qui est compatible avec la structure de corps.
9. Montrer qu'il existe une unique relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ qui est compatible avec la structure de corps.
10. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. On note $\sum \mathbb{K}^2$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}$ dont les éléments peuvent s'écrire comme somme finie de carrés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
    (a) i. $\mathbb{K}$ est ordonnable ;
    ii. $\mathbb{K} \neq \sum \mathbb{K}^2$ ;
    iii. $-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$ ;
    iv. une somme de carrés $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ est nulle dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, tous les $x_i$ sont nuls ;
    v. il existe une partie non vide $P$ de $\mathbb{K}$ telle que $\mathbb{K}^2 \subset P$, $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$ .
11. Montrer qu'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est ordonnable si, et seulement si, $-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$ (théorème d'Artin-Schreier).

## – II – Nombres algébriques et nombres transcendants

On dit qu'un nombre complexe $\alpha$ est algébrique s'il existe un polynôme non nul $P$ dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres complexes algébriques.

Si $A$ est un anneau commutatif unitaire et $n$ un entier naturel non nul, on note $A[X_1, \cdots, X_n]$ l'anneau des polynômes à $n$ indéterminées à coefficients dans $A$.

On dit qu'un polynôme $P$ dans $A[X_1, \cdots, X_n]$ est symétrique s'il pour toute permutation $\sigma$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ on a $P\left(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)}\right) = P(X_1, \cdots, X_n)$.

Les polynômes symétriques élémentaires $(\sigma_k)_{1\leq k\leq n}$ sont définis par :

$$\forall k \in \{1,2,\cdots,n\}, \quad \sigma_k(X_1,\cdots,X_n) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}.$$

On rappelle que si $P \in A[X_1,\cdots,X_n]$ est symétrique, il existe alors un polynôme $Q$ dans $A[X_1,\cdots,X_n]$ tel que $P(X_1,\cdots,X_n) = Q(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$.

1. Soit $P$ un polynôme non constant et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que toutes les racines complexes de $P$ sont simples.
2. Soit $P$ un polynôme non constant dans $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n$ et $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ ses racines complexes.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $Q$ dans $\mathbb{Q}[X]$ le polynôme $R(X) = \prod_{j=1}^{n} Q(X+\alpha_j)$ est dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) En supposant tous les $\alpha_j$ non nuls, montrer que pour tout polynôme $Q$ dans $\mathbb{Q}[X]$ de degré $m$, le polynôme $S(X) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j^m Q\left(\frac{X}{\alpha_j}\right)$ est dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Soit $\alpha$ un nombre algébrique.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_\alpha$ dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que :
   $$\{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\} = \mathbb{Q}[X] \cdot P_\alpha.$$
   On dit que $P_\alpha$ est le polynôme minimal de $\alpha$ et son degré est le degré de $\alpha$. Il est noté $d(\alpha)$.
   (b) Montrer que le polynôme minimal de $\alpha$ est l'unique polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ qui annule $\alpha$.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres complexes algébriques est un corps.
5. Soit $(P_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de polynômes unitaires non constants dans $\mathbb{Q}[X]$. Pour tout $k$ compris entre 1 et $n$, on note $p_k$ le degré de $P_k$ et $\alpha_{k,1},\cdots,\alpha_{k,p_k}$ les racines complexes de $P_k$. Montrer que le polynôme $Q$ défini par :
   $$Q(X) = \prod_{\substack{1\leq j_1\leq p_1 \\ \vdots \\ 1\leq j_n\leq p_n}} \left(X^n + \alpha_{1,j_1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1,j_{n-1}}X + \alpha_{n,j_n}\right)$$
   est dans $\mathbb{Q}[X]$.
6. En utilisant la question précédente, montrer que le corps $\mathbb{A}$ des nombres complexes algébriques est algébriquement clos.
7. Soient $\alpha,\beta$ deux nombres algébriques, $P_\alpha(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme minimal de $\alpha$ et $P_\beta(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ celui de $\beta$ avec $a_n = b_m = 1$. On note :
   $$\left\{\alpha^i\beta^j \mid 0\leq i\leq n-1,\ 0\leq j\leq m-1\right\} = \{\gamma_k \mid 1\leq k\leq p\}$$
   où $p = nm$ et $\gamma_1 = \alpha^0\beta^0 = 1$. On désigne par $v$ le vecteur de $\mathbb{C}^p$ de composantes $\gamma_1,\cdots,\gamma_p$.
   (a) Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre $p$ à coefficients rationnels $A$ et $B$ telles que $\alpha v = Av$ et $\beta v = BV$.

(b) En utilisant le résultat de **II.7a**, retrouver le fait que $\mathbb{A}$ est un corps.

8. Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non constant de degré $n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{A}$ et $\alpha$ une racine complexe de $P$. Pour tout entier $k$ compris entre 0 et $n$ on note $n_k$ le degré du nombre algébrique $a_k$ et :

$$\left\{\alpha^i a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \mid 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq i_k \leq n_k - 1\right\} = \{\gamma_k \mid 1 \leq k \leq p\}$$

où $p = nn_0 \cdots n_n$ et $\gamma_1 = 1$. On désigne par $v$ le vecteur de $\mathbb{C}^p$ de composantes $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre $p$ à coefficients rationnels $A$ telle que $\alpha v = Av$.

   (b) En déduire que $\alpha$ est algébrique. On retrouve ainsi le fait que $\mathbb{A}$ est algébriquement clos.

## – III – Nombres transcendants et automorphismes croissants de $\mathbb{Q}^{+,*}$

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont munis de leur structure naturelle de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

$\mathbb{R}^{+,*}$ désigne le groupe multiplicatif des réels strictement positifs.

Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes avec $\alpha$ non nul, on définit alors $\alpha^\beta$ par $\alpha^\beta = e^{(\ln(a)+i\pi)\beta}$ si $\alpha = -a$ avec $a$ réel strictement positif et $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$ où ln est la détermination principale du logarithme si $\alpha$ est dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

On admettra les résultats suivants.

**Théorème 1 (des six exponentielles)** *Si $x_1, x_2$ sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $y_1, y_2, y_3$ trois nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors l'un au moins des six nombres complexes $e^{x_i y_j}$, pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, est transcendant.*

**Théorème 2 (Gelfond-Schneider)** *Si $\alpha$ est un nombre algébrique non nul et $\beta$ un nombre algébrique n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$, alors $\alpha^\beta$ est transcendant.*

1. Montrer que les seuls endomorphismes du groupe additif $\mathbb{R}$ qui sont monotones sont les homothéties (i.e. les applications $x \mapsto \lambda x$, où $\lambda$ est une constante réelle).
2. Montrer que l'identité est le seul endomorphisme de corps non identiquement nul de $\mathbb{R}$.
3. Soient $G, H$ deux sous-groupes du groupe additif $\mathbb{R}$ et $\varphi$ un morphisme de groupes croissant de $G$ vers $H$. Montrer qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $\varphi(x) = \lambda x$ pour tout $x$ dans $G$.
4. Soient $G, H$ deux sous-groupes du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\sigma$ un morphisme de groupes croissant de $G$ vers $H$. Montrer qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $\sigma(x) = x^\lambda$ pour tout $x$ dans $G$.
5. Montrer que les réels $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
6. En utilisant le théorème des six exponentielles, montrer que si $\alpha$ est un nombre complexe tel que $2^\alpha$, $3^\alpha$ et $5^\alpha$ sont des entiers alors $\alpha$ est un entier.
7. Soit $\alpha$ un nombre algébrique différent de 0 et de 1. Montrer que si $\beta$ est un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ alors l'un des trois nombres complexes $\alpha^\beta$, $\alpha^{\beta^2}$ ou $\alpha^{\beta^3}$ est transcendant.
8. Soit $G$ un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+,*}$ contenu dans $\mathbb{A}$. Montrer que si $\sigma$ est un automorphisme croissant de $G$ alors il existe un nombre rationnel positif $r$ tel que $\sigma(x) = rx$ pour tout $x$ dans $G$.
9. Soit $P$ un polynôme non constant à coefficients entiers relatifs défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n$ non nul.

(a) Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ est une racine rationnelle non nulle de $P$, où $p, q$ sont deux entiers relatifs premiers entre eux, alors $p$ divise $a_0$ et $q$ divise $a_n$.

(b) Montrer que si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme unitaire non constant à coefficients entiers relatifs ($a_n = 1$) alors les racines de $P$ sont soit entières, soit irrationnelles.

(c) Montrer que pour tout entier $r \geq 2$ et tout nombre premier $p \geq 2$, $\sqrt[r]{p}$ est irrationnel.

10. Montrer que l'identité est le seul automorphisme croissant du groupe multiplicatif $\mathbb{Q}^{+,*}$ (théorème de Glass-Ribenboim, 1993).